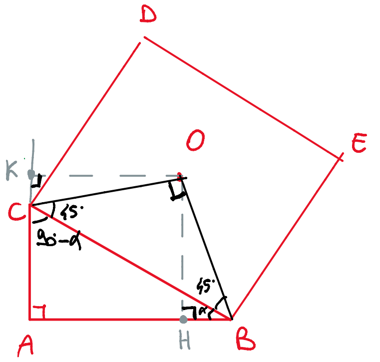
Correzione seconda prova

giovedì 22 giugno 2023

Q1



Dim che $OH = OK$

$OC \cong OB$ perché metà diagonale quadrato $\Rightarrow \overset{\triangle}{OCB}$ isoscele

$O\hat{C}B \cong O\hat{B}C = 45°$ perché $\overset{\triangle}{OCB}$ isoscele e le diagonali del quadrato bisecano gli angoli relativi ai vertici

Considero $\overset{\triangle}{OKC}$ e $\overset{\triangle}{OHB}$:
$$\begin{cases} OB \cong OC & \text{per quanto detto sopra} \\ O\hat{H}B \cong O\hat{K}C = 90° & \text{perché } OH \text{ e } OK \text{ sono distanze} \\ O\hat{B}H \cong O\hat{C}K & \text{perché } O\hat{B}H = 45° + \alpha \text{ e} \end{cases}$$
$$O\hat{C}K = 180° - 45° - (90° - \alpha) = 90° - 45° + \alpha = 45° + \alpha$$

Allora per il 2° criterio di congruenza dei triangoli $\overset{\triangle}{OKC} \cong \overset{\triangle}{OHB}$ e, in particolare $HO \cong OK$ perché lati corrispondenti in triangoli congruenti.

Q2

$p =$ "prob. dispari" $\quad 2p =$ "prob. pari"

$$p + p + p + 2p + 2p + 2p = 1 \rightarrow 9p = 1 \rightarrow p = \frac{1}{9}$$

$$p(\text{n° primo}) = p(\text{"2" o "3" o "5"}) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

$$p(n \geq 3) = p(\text{"3" o "4" o "5" o "6"}) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

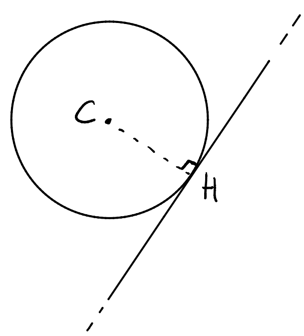
$$p(n \leq 3) = p(\text{"1" o "2" o "3"}) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

Q3

r passa per $A(1,-2,0)$ $B(2,3,-1)$ eq sfera $C(1,-6,7)$ tg a r

$$\vec{AB}(2-1, 3+2, -1-0) \rightarrow \vec{v}(1,5,-1)$$

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 5t \\ z = -t \end{cases}$$



raggio è distanza tra C e r:

(1) piano $\perp r$ passante per C: $\vec{m} = \vec{v}(1,5,-1)$

$$1(x-1) + 5(y+6) - (z-7) = 0$$
$$x - 1 + 5y + 30 - z + 7 = 0$$
$$x + 5y - z + 36 = 0$$

(2) piano $\cap$ r: $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2+5t \\ z=-t \\ x+5y-z+36=0 \end{cases}$ $\begin{cases} '' \\ 1+t+5(-2+5t)+t+36=0 \end{cases}$

$\begin{cases} '' \\ 1+t-10+25t+t+36=0 \end{cases}$ $\begin{cases} '' \\ 27t=-27 \to t=-1 \end{cases}$

$\begin{cases} x=0 \\ y=-7 \\ z=1 \end{cases} \longrightarrow H(0,-7,1)$

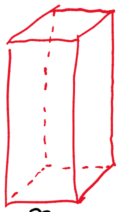
(3) raggio $= CH = \sqrt{(0-1)^2+(-7+6)^2+(1-7)^2} = \sqrt{1+1+36} = \sqrt{38}$

Superficie sferica: $(x-1)^2+(y+6)^2+(z-7)^2=38$

$x^2+1-2x+y^2+36+12y+z^2+49-14z=38$

$x^2+y^2+z^2-2x+12y-14z+48=0$

$\boxed{Q4}$



x

V fissato

area tot min è anche diagonale min

$V=x^2h \to h=\frac{V}{x^2}$ $\quad x>0$

$A_{TOT}(x)=2x^2+4\cancel{x}\cdot\frac{V}{x^{\cancel{2}}}$ $\quad d(x)=\sqrt{(\sqrt{2}x)^2+\left(\frac{V}{x^2}\right)^2}$

$A_{TOT}(x)=2x^2+\frac{4V}{x}$ $\quad d(x)=\sqrt{2x^2+\frac{V^2}{x^4}}$

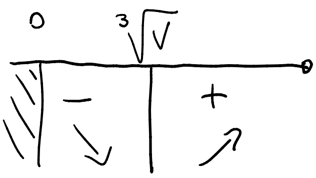
$A'=4x-\frac{4V}{x^2}$ $\quad d'=\left(\cancel{4}^{2}x-\frac{\cancel{4}^{2}V^2x^3}{x^8}\right)\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{2x^2+\frac{V^2}{x^4}}}$

$A'=\frac{4x^3-4V}{x^2}$ $\quad d'=\frac{2x^9-2V^2x^3}{\frac{x^{\cancel{8}6}\sqrt{2x^6+V^2}}{\cancel{x^2}}} \to d'=\frac{2x^6-2V^2}{x^3\sqrt{2x^6+V^2}}$

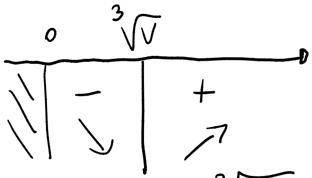
$4x^3-4V>0$

$x^3>V \to x>\sqrt[3]{V}$

$\cancel{2}x^6-\cancel{2}V^2>0 \to x^6>V^2 \to x>\sqrt[\cancel{6}3]{V^{\cancel{2}}}$



min in $x=\sqrt[3]{V}$



min in $x=\sqrt[3]{V}$

sì

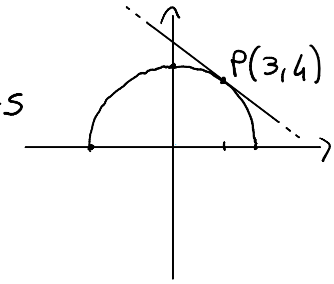
$\boxed{Q5}$ Retta tg a $y=\sqrt{25-x^2}$ in $x=3$ $\quad y_P=\sqrt{25-3^2}=4$

MODO 1: $\quad y'=\dfrac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}} \qquad m=y'(3)=-\dfrac{3}{4}$

$$r_{tg}: \quad y-4=-\frac{3}{4}(x-3) \rightarrow y=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}$$

MODO 2: $\begin{cases} y^2=25-x^2 \\ y\geq 0 \\ -5\leq x\leq 5 \end{cases} \rightarrow \quad x^2+y^2=25$

circo $C(0,0), r=5$



Si può usare sdoppiamento oppure $\Delta=0$ oppure raggio $\perp$ tg

(2a) Con sdoppiamento: $\quad x_P\cdot x+y_P\cdot y=25$

$$3x+4y=25 \rightarrow y=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}$$

(2b) Con $\Delta=0$: $\quad \begin{cases} x^2+y^2=25 \\ y-4=m(x-3) \end{cases} \quad \begin{cases} '' \\ y=mx-3m+4 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2+(mx-3m+4)^2=25 \\ '' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+m^2x^2+9m^2+16-6m^2x+8mx-24m=25 \\ '' \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1+m^2)x^2+2(-3m^2+4m)x+9m^2-24m-9=0 \\ '' \end{cases}$$

$$\Delta=0 \rightarrow (-3m^2+4m)^2-(1+m^2)(9m^2-24m-9)=0$$

$$\cancel{9m^4}+16m^2-\cancel{24m^3}-\cancel{9m^2}+24m+9-\cancel{9m^4}+\cancel{24m^3}+\cancel{9m^2}=0$$

$$m_{1,2}=\frac{-12\pm\sqrt{144-144}}{16}=-\frac{\cancel{12}\,3}{\cancel{16}\,4}$$

$$y-4=-\frac{3}{4}(x-3) \rightarrow y=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}$$

(2c) Raggio $\perp$ tg: $\quad$ Retta per OP $\quad \dfrac{y-0}{4-0}=\dfrac{x-0}{3-0} \rightarrow y=\dfrac{4}{3}x$

$$m_\perp=-\frac{3}{4}$$

$$y-4=-\frac{3}{4}(x-3) \rightarrow y=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}$$

$\boxed{Q6}$ $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}x-(ax^3+bx)}{x^3}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\left[\frac{\operatorname{sen}x}{x}\to 1 - a x^2 - b\right]}{x^{\cancel{3}\,2}} = \lim_{x\to 0}\frac{-ax^2-b+1}{x^2}\neq\infty \text{ s.se}$$

$$-b+1=0 \to b=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x-(ax^3+bx)}{x^3}=\frac{0}{0} \quad \text{H}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-3ax^2-b}{3x^2} \quad \text{H}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-6ax}{6x}=-\frac{1}{6}-a \qquad -\frac{1}{6}-a=1\to a=-\frac{7}{6}$$

$\boxed{Q7}$ $$f(x)=\begin{cases}-1+\arctan x & x<0\\ ax+b & x\geq 0\end{cases} \qquad \text{derivabile}$$

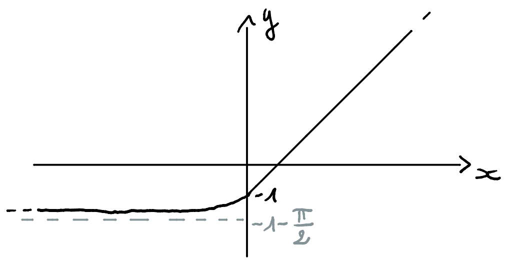
continuità: $$\lim_{x\to 0^-}-1+\arctan x=-1$$
$$\lim_{x\to 0^+} ax+b=b \qquad \to b=-1$$

derivabilità: $$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+x^2} & x<0\\ a & x\geq 0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1+x^2}=1$$
$$\lim_{x\to 0^+} a=a \qquad \to a=1$$

Rolle: cont e der a posto, dobbiamo vedere se $\exists\, a,b$ t.c. $f(a)=f(b)$

$$f(x)=\begin{cases}-1+\arctan x & x<0\\ x-1 & x\geq 0\end{cases} \to \text{faccio il grafico}$$



$\to \nexists\, a,b$ t.c. $f(a)=f(b)$

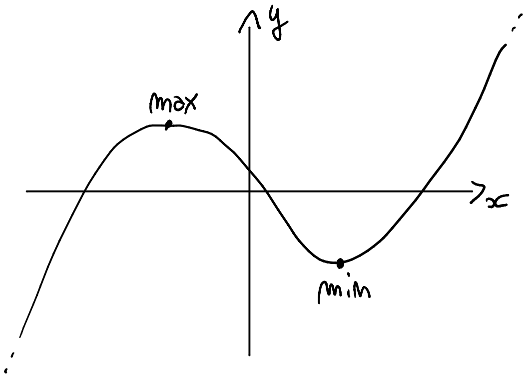
non esiste un intervallo in cui f soddisfa le ipotesi di Rolle

$\boxed{98}$ $f_a(x) = x^5 - 5ax + a$ $a>0$ $3 \underbrace{\text{zeri}}_{}$ reali distinti

intersezioni con asse x

- $\lim_{x \to \pm\infty} x^5 - 5ax + a = \pm\infty$

  $\rightarrow$ sicuramente ha almeno uno zero perchè f è continua su $\mathbb{R}$



- se dimostro per quali a ha un max con $y>0$ e un min con $y<0$ ho finito:

$f_a'(x) = 5x^4 - 5a$

$f_a'(x) > 0 \rightarrow \cancel{5}x^4 > \cancel{5}a$, $a>0$ per ipotesi $\Rightarrow x < -\sqrt[4]{a} \vee x > \sqrt[4]{a}$

$-\sqrt[4]{a}$ $\sqrt[4]{a}$

$+$ | $-$ | $+$

$\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$

$\max\left(-\sqrt[4]{a},\ 4a\sqrt[4]{a} + a\right)$

$\left(-\sqrt[4]{a}\right)^5 + 5a\sqrt[4]{a} + a = -a\sqrt[4]{a} + 5a\sqrt[4]{a} + a$

$4a\sqrt[4]{a} + a > 0 \quad \forall a$ poichè $a>0$ per ipotesi

$\min\left(\sqrt[4]{a},\ -4a\sqrt[4]{a} + a\right)$

$-4a\sqrt[4]{a} + a < 0$ posso dividere per a perchè $a>0$

$4\sqrt[4]{a} > 1 \rightarrow \sqrt[4]{a} > \frac{1}{4} \rightarrow a > \frac{1}{256}$

PROBLEMA 2

$a \neq 0$ $f_a(x) = \dfrac{x^2 - ax}{x^2 - a}$

a) Dominio: se $a>0$ $x^2 - a \neq 0 \rightarrow x \neq \pm\sqrt{a}$

se $a<0$ $x^2 - a \neq 0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$

Discontinuità: se $a<0$ continua su tutto $\mathbb{R}$

se $a>0$ e $a \neq 1$ $x = \pm\sqrt{a}$ disc. di II specie

se $a=1$ $f_1(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1}$

$\lim_{x \to 1^{\pm}} f_1(x) = \frac{0}{0}$ F.I. $\rightarrow \lim_{x \to 1^{\pm}} \dfrac{x\cancel{(x-1)}}{(x+1)\cancel{(x-1)}} = 1$ ma $\nexists f_1(1) \rightarrow$ disc. III specie in $x=1$

$\lim_{x \to -1^{\pm}} f_1(x) = \frac{0}{0}$ F.I. $\rightarrow \lim_{x \to -1^{\pm}} \dfrac{x}{x+1} = \infty$ disc. II specie in $x=-1$

Asintoti: $\lim_{x \to \pm\infty} f_a(x) = 1 \rightarrow y = 1$ as. orizzontale

se $a<0$: non ci sono asintoti verticali

se $a>0$ e $a \neq 1$: $\lim_{x \to \pm\sqrt{a}^{\pm}} f_a(x) = \infty \rightarrow x = \pm\sqrt{a}$ asint. verticali

se $a=1$: vedi limiti sopra as. vert. $x=-1$

(b) $\begin{cases} f_a(x) \\ y=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x^2-ax}{x^2-a} \\ y=1 \end{cases} \xrightarrow{a\neq 1} \begin{cases} \cancel{x^2}-a = \cancel{x^2}-ax \\ '' \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \quad P(1,1)$

altrimenti si semplifica come sopra e viene $\cancel{x}+1=\cancel{x}$ imp.

Retta tg nell'origine: $f_a'(x) = \dfrac{(2x-a)(x^2-a)-2x(x^2-ax)}{(x^2-a)^2}$

$$f_a'(x) = \frac{\cancel{2x^3}-2ax-ax^2+a^2-\cancel{2x^3}+2ax^2}{(x^2-a)^2}$$

$$f_a'(x) = \frac{ax^2-2ax+a^2}{(x^2-a)^2}$$

$$m_{tg} = f_a'(0) = \frac{a^2}{a^2} = 1 \qquad tg: y = x$$

(c) $a<1$ **monotonia**

$$f_a'(x) > 0 \qquad \frac{a(x^2-2x+a)}{(x^2-a)^2} > 0$$

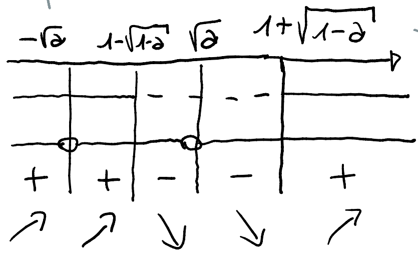
per decidere la posizione basta risolvere $\sqrt{a} > 1-\sqrt{1-a}$, per gli altri due valori basta fare considerazioni elementari

$a<1$ per ipotesi

se $0<a<1$ N: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-a}$

$x < 1-\sqrt{1-a} \vee x > 1+\sqrt{1-a}$

D: $x \neq \pm\sqrt{a}$



Monotona crescente: $(-\infty, -\sqrt{a}) \cup (-\sqrt{a}, 1-\sqrt{1-a}) \cup (1+\sqrt{1-a}, +\infty)$

Monotona decrescente: $(1-\sqrt{1-a}, \sqrt{a}) \cup (\sqrt{a}, 1+\sqrt{1-a})$

Se $a<0$ Divido per a (che è un numero negativo)

$$\frac{x^2-2x+a}{(x^2-a)^2}<0$$

N: $x<1-\sqrt{1-a} \vee x>1+\sqrt{1-a}$

D: $\forall x$

	$1-\sqrt{1-a}$		$1+\sqrt{1-a}$	
N	—	- - -	—	—
D	—	—	—	—
	+		$\ominus$	+

La derivata è positiva per $1-\sqrt{1-a}<x<1+\sqrt{1-a}$

Monotona crescente: $(1-\sqrt{1-a}, 1+\sqrt{1-a})$

Monotona decrescente: $(-\infty, 1-\sqrt{1-a}) \cup (1+\sqrt{1+a}, +\infty)$

Studio funz.

$$f_{-1}(x)=\frac{x^2+x}{x^2+1}$$

D: $(-\infty,+\infty)$

né pari, né dispari

∩assi: $(0,0),(-1,0)$

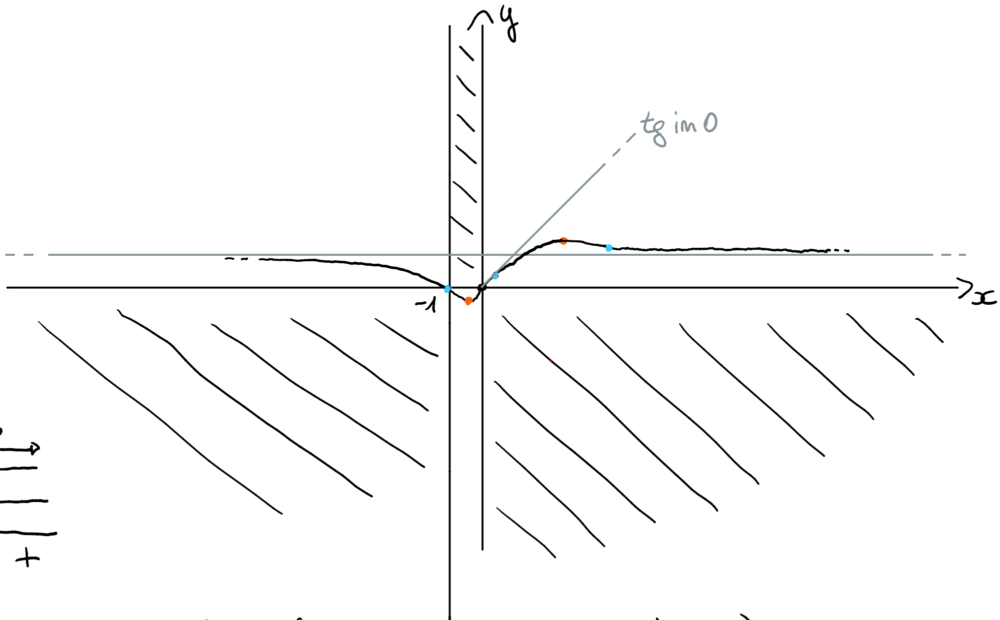
Segno: $\frac{x(x+1)}{x^2+1}>0$

$N_1: x>0$

$N_2: x>-1$

D: $\forall x$

	-1		0	
N_1	- -	- -	—	—
N_2	- -	—	—	—
D	—	—	—	—
	+		−	+



Limiti e asintoti: $y=1$ as. orizz. (vedi punto a del problema)

Derivata prima:

$$f'_{-1}(x)=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$$

$f'_{-1}(x)=0 \qquad x^2-2x-1=0 \qquad x_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$

$f'_{-1}(x)>0 \qquad -x^2+2x+1>0 \qquad 1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$

	$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$	
	− ↘		+ ↗	− ↘

min $\left(1-\sqrt{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$

max $\left(1+\sqrt{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$

$$y_{min}=\frac{(1-\sqrt{2})^2+1-\sqrt{2}}{(1-\sqrt{2})^2+1}=\frac{1+2-2\sqrt{2}+1-\sqrt{2}}{1+2-2\sqrt{2}+1}=\frac{4-3\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}\cdot\frac{4+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{16+8\sqrt{2}-12\sqrt{2}-12}{16-4\cdot 2}=\frac{4-4\sqrt{2}}{8}=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

$$y_{max}=\frac{1+2+2\sqrt{2}+1+\sqrt{2}}{1+2+2\sqrt{2}+1}=\frac{4+3\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}\cdot\frac{4-2\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}=\frac{4+4\sqrt{2}}{8}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

Derivata seconda:

$$f''_{-1}(x)=\frac{(-2x+2)(x^2+1)^2-2(x^2+1)\cdot 2x(-x^2+2x+1)}{(x^2+1)^4}$$

$$f''_{-1}(x)=\frac{\cancel{(x^2+1)}\left[(-2x+2)(x^2+1)-4x(-x^2+2x+1)\right]}{(x^2+1)^{\cancel{4}3}}$$

$$f''_{-1}(x)=\frac{-2x^3-2x+2x^2+2+4x^3-8x^2-4x}{(x^2+1)^3}$$

Alternativamente si può fare Ruffini con -1

$$f''_{-1}(x)=\frac{2x^3-6x^2-6x+2}{(x^2+1)^3}\rightarrow f''_{-1}(x)=\frac{2(x^3+1)-6x(x+1)}{(x^2+1)^3}$$

$$f''_{-1}(x)=\frac{2(x+1)(x^2-x+1)-6x(x+1)}{(x^2+1)^3}$$

$$f''_{-1}(x)=\frac{2(x+1)(x^2-x+1-3x)}{(x^2+1)^3}\rightarrow f''_{-1}(x)=\frac{2(x+1)(x^2-4x+1)}{(x^2+1)^3}$$

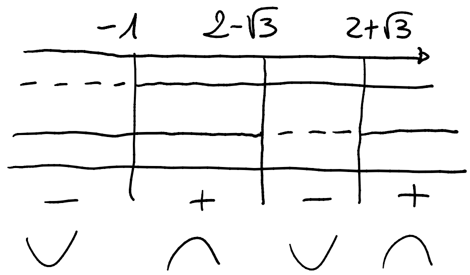
$$f''_{-1}(x)=0\rightarrow x=-1 \ \vee \ x_{1,2}=2\pm\sqrt{3}$$

$f''_{-1}(x)>0$

N_1: $x>-1$

N_2: $x<2-\sqrt{3} \ \vee \ x>2+\sqrt{3}$

D: $\forall x\in\mathbb{R}$



PTI DI FLESSO: $(-1,0)$ $\left(2-\sqrt{3},\ \frac{3-\sqrt{3}}{4}\right)$ $\left(2+\sqrt{3},\ \frac{3+\sqrt{3}}{4}\right)$

d) Area compresa tra Ω_{-1}, tg in O e $x=\sqrt{3}$

$x^2(x-1)-(x-1)=(x-1)^2(x+1)$

tg in O: $y=x$ $\quad f_{-1}\cap tg$: $\begin{cases}y=\frac{x^2+x}{x^2+1}\\ y=x\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=\frac{x^2+x}{x^2+1}\\ "\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x^3-x^2-x+1=0\\ y=x\end{cases}\rightarrow(1,1)$

L'area richiesta è la porzione di piano tra $x=1$ e $x=\sqrt{3}$ superiore a Ω_{-1} e inferiore alla tangente sommata alla parte di piano tra $x=0$ e $x=\sqrt{3}$ inferiore a Ω_{1} e superiore alla tangente.

$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$

$\int \frac{x^2+x}{x^2+1}\,dx = \int 1\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx =$

$= x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \arctan x + c$

$$\begin{array}{cc|c} x^2+x & & x^2+1 \\ -x^2 & -1 & 1 \\ \hline // & x-1 & \end{array}$$

$\frac{x^2+x}{x^2+1} = 1 + \frac{x-1}{x^2+1}$

$$A = \int_0^1 \left(\frac{x^2+x}{x^2+1} - x\right)dx + \int_1^{\sqrt{3}}\left(x - \frac{x^2+x}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \left[x\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1 - \left[\arctan x\right]_0^1 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{\sqrt{3}} - \left[x\right]_1^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_1^{\sqrt{3}} + \left[\arctan x\right]_1^{\sqrt{3}} =$$

$$= \cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2}\ln 2} - \frac{\pi}{4} - \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2} - \cancel{\frac{1}{2}} - \sqrt{3} + 1 - \underbrace{\cancel{\frac{1}{2}}\ln 4}_{\to -\frac{1}{2}\ln 2^2 = -\frac{1}{2}\cdot 2\ln 2 = -\ln 2} + \cancel{\frac{1}{2}\ln 2} + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5}{2} - \frac{\pi}{6} - \sqrt{3}$$

PROBLEMA 1

a) $-2 \le x < 0$ $\quad y = a(x+2)^2$ passa per $(0,1)$ e $(-2,0)$, inserisco $(0,1)$:

$1 = 4a \to a = \frac{1}{4}$

$0 \le x \le 1$ $\quad x^2 + y^2 + b = 0$ passa per $(0,1)$ e $(1,0) \to b = -1$

(oppure vedo che è circonferenza con $C(0,0)$ e $r=1$)

$y^2 = -x^2 + 1 \to y = + \sqrt{-x^2+1}$

perchè è l'arco superiore della circonferenza

$1 < x \le 2$ $\quad x^2 - y^2 + c = 0$ passa per $(1,0) \to c = -1$

$y^2 = x^2 - 1 \to y = + \sqrt{x^2-1}$

perchè $y \ge 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+2)^2 & \text{se } -2 \le x < 0 \\ \sqrt{-x^2+1} & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ \sqrt{x^2-1} & \text{se } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Derivabilità e tangenti

$x = -2$ $\quad y_1' = \frac{1}{\cancel{4}_2}\cdot \cancel{2}(x+2) \to y' = \frac{1}{2}x + 1$

$\lim_{x \to -2^+} \frac{1}{2}x + 1 = 0$ $\quad$ derivabile

Retta tangente: $y - 0 = 0(x+2) \to y = 0$

$x=0$ $\quad y_2' = -\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{-x^2+1}}$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{2}x+1=1 \qquad \lim_{x\to 0^+} -\frac{x}{\sqrt{-x^2+1}}=0$ pto angoloso

Rette tangenti: prima di $x=0$ $\quad y-2=1(x-0)\to y=x+2$

dopo $x=0$ $\quad y-2=0(x-0)\to y=2$

$x=1$ $\quad y_3' = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

$\lim_{x\to 1^-} -\frac{x}{\sqrt{-x^2+1}}=-\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=+\infty$ cuspide

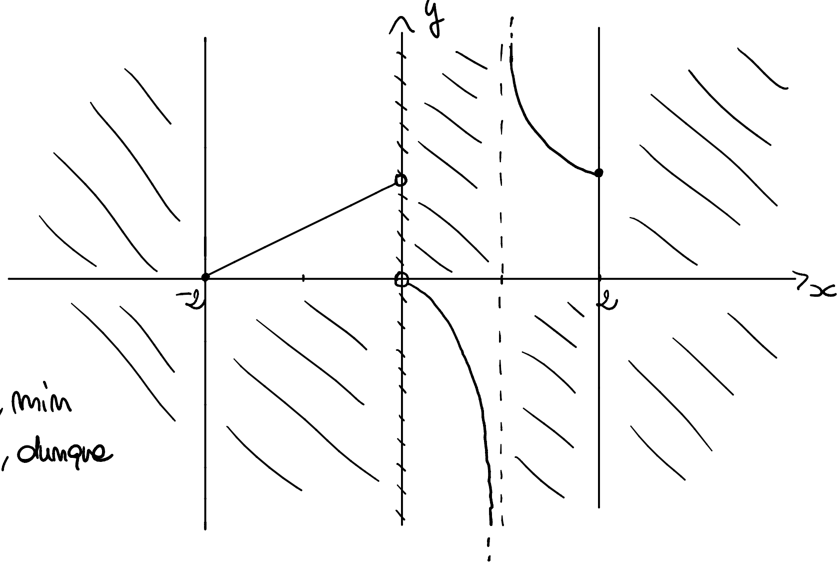
Retta tangente è la retta verticale $x=1$

$x=2$ $\quad \lim_{x\to 2^-} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ derivabile

Retta tangente: $y_3(2)=\sqrt{3} \to y-\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}(x-2)$

$y=\frac{2\sqrt{3}}{3}x-\frac{\sqrt{3}}{3}$

b Dedurre f':



Dominio: sappiamo che f non è derivabile in $x=0,\ x=1$ dunque il dominio è $[-2,0)\cup(0,1)\cup(1,2]$

Nasse x: $f'=0$ quando f ha max, min o flesso a tg orizzontale, dunque $(-2,0)$

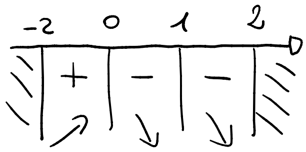
Segno: $f'>0$ quando f è crescente, dunque $(-2,0)\cup(1,2)$

Limiti e asintoti: sappiamo dal punto (a) che $\lim_{x\to 0^-} f'=1 \quad \lim_{x\to 0^+} f'=0$

$\lim_{x\to 1^-} f'=-\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} f'=+\infty \to x=1$ as. verticale

$f'(2)=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

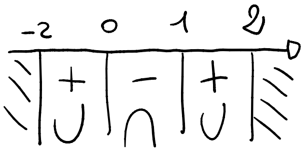
Derivata prima: $f'>0$ quando f ha concavità verso l'alto, dunque $(-2,0)$



In particolare f' in $(-2,0)$ è il segmento di retta $y=\frac{1}{2}x+1$.

Intervalli di concavità e convessità di $F(x)=\int_{-2}^{x} f(t)\,dt$

$F'(x)=f(x)$ e $F''(x)=f'(x)$ dunque il segno di $F''(x)$ è



concavità verso l'alto $(-2,0)\cup(1,-2)$

concavità verso il basso $(0,1)$

ⓒ $y=\frac{1}{4}(x+2)^2$ in $[-2,0]$ è invertibile poiché è iniettiva e suriettiva su $[0,1]$ dunque biunivoca

$h(x)$: $\sqrt{y}=\frac{1}{2}(x+2) \to 2\sqrt{y}=x+2 \to x=2\sqrt{y}-2$

$h(x)=2\sqrt{x}-2$ in $[y(-2),y(0)]$ cioè $[0,1]$

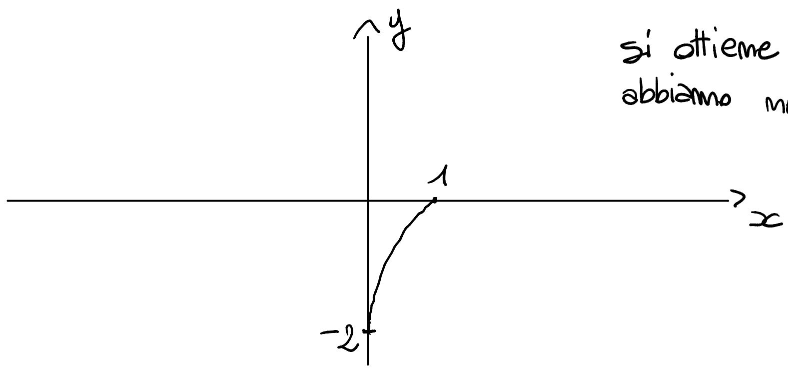
oppure si può vedere il codominio del grafico

Derivabilità $h'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$$ semicuspide

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt{x}}=1$$ derivabile

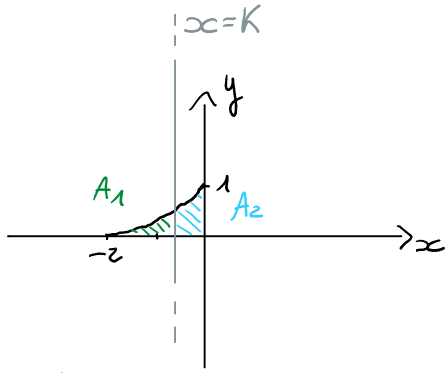
Grafico



si ottiene dal grafico che abbiamo nel testo

d) $\Gamma_1: \; y=\frac{1}{4}(x+2)^2 \;$ in $[-2,0]$

K t.c. $A_1=A_2$



$$\int_{-2}^{K}\left(\frac{1}{4}x^2+x+1\right)dx=\int_{K}^{0}\left(\frac{1}{4}x^2+x+1\right)dx$$

$$\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right]_{-2}^{K}=\frac{1}{12}K^3+\frac{K^2}{2}+K-\left(\frac{-\cancel{8}^{\,2}}{\cancel{12}_{\,3}}+\frac{\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{2}}-2\right)=\frac{1}{12}K^3+\frac{K^2}{2}+K+\frac{2}{3}$$

$$\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right]_{K}^{0}=-\frac{K^3}{12}-\frac{K^2}{2}-K$$

$$\frac{1}{12}K^3+\frac{K^2}{2}+K+\frac{2}{3}=-\frac{K^3}{12}-\frac{K^2}{2}-K$$

$$\frac{K^3}{6}+K^2+2K+\frac{2}{3}=0 \;\rightarrow\; K^3+6K^2+12K+4=0$$

Completo il cubo: $K^3+6K^2+12K+8-4=0 \rightarrow (K+2)^3=4 \rightarrow K+2=\sqrt[3]{4}$

$K=\sqrt[3]{4}-2$