ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

Soluzioni degli esercizi elementari

Soluzione dell'esercizio 1.

1. Partiamo osservando che la funzione non è altro che una retta orizzontale parecchio in alto; quindi, per come abbiamo definito la derivata in un punto, ci aspettiamo che "la tangente in ogni suo punto sia la retta stessa", ovvero che $f'(x) = m = 0 \ \forall x$. E in effetti, chiamando k il valore orrendo della f:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{k} - \cancel{k}}{h} = 0,$$

valido $\forall k \in \mathbb{R}$ e $\forall x_0 \in \mathbb{R}$.

2. Trattandosi anche questa di una retta, seppur obliqua, ci aspettiamo che anche stavolta sia "tangente di se stessa" in ogni punto, e quindi che $f'(x) = m = 11 \ \forall x$. Infatti:

$$\begin{aligned} f'(-2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{11\,(-2+h) - 11(-2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-\cancel{22} + 11h + \cancel{22}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{11\,\cancel{h}}{\cancel{h}} = 11, \end{aligned}$$

valido indipendentemente da x_0.

3. Calcoliamo la derivata di f in $x_0 = 2$:

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 + 1 - (2^2+1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{4} + 4h + h^2 + \cancel{1} - \cancel{4} - \cancel{1}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}\,(4+h)}{\cancel{h}} = 4. \end{aligned}$$

Analogamente, la derivata di f in $x_0 = 5$ vale 10. Osserviamo che il grado del polinomio è 2 e la derivata in entrambi i punti vale $2x_0$.

4. Calcoliamo la derivata di f in $x_0 = -1$:

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{h\to 0} \frac{(-1+h)^3 - 3 - \left((-1)^3 - 3\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-\cancel{1} + 3h - 3h^2 + h^3 - \cancel{3} + \cancel{1} + \cancel{3}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}\left(3 - 3h + h^2\right)}{\cancel{h}} = 3. \end{aligned}$$

Analogamente, la derivata di f in $x_0 = 4$ vale 48. Osserviamo che il grado del polinomio è 3 e la derivata in entrambi i punti vale $3x_0^2$.

5. Calcoliamo la derivata di f in $x_0 = 2$:

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 + 1000000 - (2^2 + 1000000)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{4} + 4h + h^2 + \cancel{1000000} - \cancel{4} - \cancel{1000000}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}\,(4+h)}{\cancel{h}} = 4. \end{aligned}$$

Analogamente, la derivata di f in $x_0 = 5$ vale 10. Osserviamo che, come accadeva nel terzo esercizio, il termine noto è ininfluente, e i risultati sono esattamente gli stessi. Proprio quanto ci potevamo aspettare: il grafico di questa funzione è identico a quello del terzo esercizio a meno di una traslazione molto in alto, per cui è chiaro che le rette tangenti nei punti corrispondenti avranno lo stesso coefficiente angolare. Prova a vederlo con un disegno (magari con 10 al posto di 1000000!).

6. Calcoliamo la derivata di f in $x_0 = 1$:

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h} - \sqrt{1}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^{1/2} - 1}{h} = \frac{1}{2}$$

dove abbiamo applicato il terzo limite notevole nella tabella riportata nella lezione precedente con $k = \frac{1}{2}$. Il caso $x_0 = 0$ è più delicato: provando a fare il limite, ti sarai accorto del fatto che sia necessario imporre $h \geq 0$. In effetti, la funzione data non ammette derivata nell'origine proprio per questo motivo. Approfondiremo questo dettaglio per nulla trascurabile nella prossima lezione. Intanto, prova a ragionarci un po' su: forse c'entra qualcosa il C.E. della funzione?

7. Innanzitutto rispondiamo alla prima domanda, che ci servirà per risolvere l'esercizio. La risposta è un bel no: è vero che teoricamente dovremmo separare il modulo a seconda che $x_0 - 1 + h \geq 0$ o $x_0 - 1 + h < 0$, ma per valori di h prossimi a 0 questo avrà lo stesso segno di $x_0 - 1$ e perciò si semplificherà in ogni caso. Con questa osservazione, lascio a te concludere che $f'(0) = -1$. Tutt'altro discorso vale per $x_0 = 1$: ci ritroveremo alla fine con il limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

che, come sappiamo, non esiste. Anche questo, come nell'esercizio precedente, è un punto in cui la funzione non è derivabile; rimandiamo perciò anche questo alla prossima lezione.

Soluzione dell'esercizio 2.

ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

1. Calcoliamo la derivata di $f(x) = x^3$:

$$\begin{aligned} f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^3} + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - \cancel{x^3}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\left(3x^2 + 3xh * h^2\right)}{\cancel{h}} = 3x^2. \end{aligned}$$

   Analogamente, la derivata prima di $g(x)$ è la funzione $g'(x) = 6x$.

2. Prima di perderci in un mare di conti superflui, osserviamo che quando svilupperemo $(x+h)^n$, prima semplificheremo x^n e poi raccoglieremo h da tutti gli altri termini, semplificandolo col denominatore come abbiamo fatto nell'esercizio precedente. A questo punto, tutti i termini rimasti eccetto il primo conterranno come fattore almeno una potenza di h e quindi, quando faremo il limite, questi si annulleranno tutti. Ciò che resterà sarà precisamente nx^{n-1}, ovvero il termine che nello sviluppo del binomio di Newton avrebbe avuto un fattore di h^1. E' perciò vero che la derivata di x^n è nx^{n-1}.

ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

Soluzioni degli esercizi impegnativi

Soluzione dell'esercizio 3. Il passaggio chiave consiste nello scrivere il lato sinistro come $f(x) \cdot (g(x))^{-1}$. Procediamo dunque utilizzando le Proprietà 2 e 3:

$$\begin{aligned}
\Big(f(x) \cdot (g(x))^{-1}\Big)' &= f'(x) \cdot (g(x))^{-1} + f(x) \cdot \Big((g(x))^{-1}\Big)' \\
&= \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x) \cdot \Big(-(g(x))^{-2} \cdot g'(x)\Big) \\
&= \frac{f'(x)}{g(x)} + \frac{f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} \\
&= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}.
\end{aligned}$$

Ricordando che $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ e le derivate fondamentali $(\sin(x))' = \cos(x)$ e $(\cos(x))' = -\sin(x)$, si ha che

$$\begin{aligned}
(\tan(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' &= \frac{(\sin(x))' \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (\cos(x))'}{(\cos(x))^2} \\
&= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)},
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la relazione $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ per ogni x.

Soluzione dell'esercizio 4. Facciamo una cosa per volta e iniziamo dalla prima richiesta, cioè scriviamo $f''(x)$ come limite del rapporto incrementale di $f'(x)$:

$$f''(x) = \lim_{k \to 0} \frac{f'(x+k) - f'(x)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{1}{k} \left(f'(x+k) - f'(x)\right).$$

Ora sostituiamo

$$\begin{aligned}
f'(x+k) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+k+h) - f(x+k)}{h}, \\
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}
\end{aligned}$$

e otteniamo

$$f''(x) = \lim_{k \to 0} \frac{1}{k} \left(\lim_{h \to 0} \frac{f(x+k+h) - f(x+k)}{h} - \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right).$$

Prima di partire sparati a sostituire $f(x) = x^3$, trovandoci a dover calcolare un cubo di un trinomio, ragioniamo un attimo. Sviluppare $(x+k+h)^3$ è come sviluppare $(y+h)^3$, dove $y = x+k$. Quindi possiamo ricondurci allo sviluppo del cubo di un binomio, in cui y^3 si semplificherà con $-y^3$, e l'unico termine che sopravvivrà al limite sarà quello con una potenza alla prima di h, analogamente a quanto succedeva negli esercizi della dispensa.

Tale termine non è altri che $3y^2h$; il limite perciò vale $3(x+k)^2$. Con ragionamento analogo, il secondo limite in h vale $3x^2$, e di nuovo non occorre sviluppare il quadrato del binomio, perché l'unico termine che rimarrà sarà quello con un fattore alla prima di k, ovvero il doppio prodotto. Con questo, possiamo concludere che il limite vale effettivamente $6x$. Se non sei convinto puoi comunque provare a calcolarlo esplicitamente!

Soluzione dell'esercizio 5. I tre esercizi conclusivi sono un tentativo di riunire i concetti espressi nella dispensa. Calcoleremo innanzitutto la derivata prima delle funzioni date, utilizzando le proprietà note e le derivate delle funzioni fondamentali (suppongo tu ti sia già procurato un bel formulario a questo punto!); poi, troveremo il coefficiente angolare della tangente nel punto x_0 assegnato valutando la derivata prima in tale punto; infine, dopo aver calcolato il valore di f in x_0, troveremo la q della tangente imponendo il suo passaggio per il punto $(x_0, f(x_0))$, e sostituiremo x_1 nell'equazione della tangente così trovata per ottenere il valore approssimato di $f(x_1)$ (che sarebbe estremamente più difficile da calcolare a mano rispetto a $f(x_0)$!). Facciamo le cose passo passo.

1. La derivata prima di $f(x)$ è
$$f'(x) \;=\; \frac{1}{\cos^2\left(3^{2x^3-8x}-1\right)}\cdot 3^{2x^3-8x}\cdot\ln 3\cdot\left(6x^2-8\right),$$
che valutata in $x_0=2$ vale $16\ln 3$. Si ha
$$f(2) \;=\; \ln\left(81^8\right) \;=\; \ln\left(3^{32}\right) \;=\; 32\ln 3,$$
e, imponendo $q=f(x_0)-mx_0$, si trova che $q=0$. La retta cercata è quindi $y=16\ln 3\cdot x$. Sostituendovi x_1 si ottiene dunque che $f(x_1)\approx 16\ln 3\cdot\left(2+\frac{1}{1000}\right) = 32\ln 3+\frac{1}{125}\cdot\ln 9$.

2. La derivata prima di $f(x)$ è
$$f'(x) \;=\; \frac{1}{\ln a\cdot\arcsin\left(\sqrt{3}x\right)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-3x^2}}\cdot\sqrt{3}$$
che valutata in $x_0=\frac{1}{2}$ vale 2. Si ha $f(x_0)=\log_a\left(\frac{\pi}{3}\right)$, e, imponendo il passaggio per $(x_0, f(x_0))$, si trova che $q=\log_a\left(\frac{\pi}{3}\right)-1$. La retta cercata è quindi $y=2x+\log_a\left(\frac{\pi}{3}\right)-1$. Si ottiene dunque che $f(x_1)\approx 2(\frac{1}{2}+\frac{1}{1000})+\log_a\left(\frac{\pi}{3}\right)-1 = \frac{1}{500}+\log_a\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

3. La derivata prima di $f(x)$ è
$$f'(x) \;=\; \frac{\frac{1}{2\sqrt{e^{x^2-2x+1}+3}}\cdot e^{x^2-2x+1}\cdot(2x-2)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)-\sqrt{e^{x^2-2x+1}+3}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\cdot\pi x}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)}.$$
Sostituendo $x_0=1$, osserviamo che al numeratore nel primo addendo compare un fattore di $2x-2$ e nel secondo un fattore $\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$, che si annullano entrambi; perciò $f'(1)=m=0$. Si calcola facilmente che $f(x_0)=2$, quindi possiamo concludere, senza neppure bisogno di calcolare la q, che la tangente cercata è la retta $y=2$ e rappresenta anche il valore approssimato di $f(x_1)$.