ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

Soluzioni Esercizi

Esercizio

Quale dei seguenti intervalli è un intorno di $x_0 = 0$?

1. $A = (-2; -1)$;
2. $B = (-1; 3]$;
3. $C = [0; 4]$;
4. $D = (-3; 10)$.

Sapendo che un intorno di $x_0 = 0$ è un intervallo aperto che contiene x_0, andando per esclusione ci accorgiamo che A non contiene x_0, B e C non sono aperti, quindi l'unica possibilità è D che in effetti è la soluzione corretta essendo aperto e contenendo x_0.

Esercizi

Utilizzando la definizione di limite verificare che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

per

- $x_0 = 0,\ f(x) = \sqrt{x+1} - 2,\ l = -1$;
- $x_0 = 2,\ f(x) = \dfrac{1}{x-1},\ l = 1$;
- $x_0 = 4,\ f(x) = \log_2(x) - 4,\ l = -2$;
- $x_0 = 3,\ f(x) = e^{x+2},\ l = e^5$;
- $x_0 = -1,\ f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1},\ l = -2$;
- $x_0 = 2,\ f(x) = \dfrac{3x^2 - x + 4}{x+5},\ l = 2$;

Ricordiamo che per definizione di limite dobbiamo verificare che preso un qualsiasi $\varepsilon > 0$ possiamo trovare un intorno $I(x_0)$ di x_0 tale che ogni x appartenente all'intorno renda vera la disequazione $|f(x) - l| < \varepsilon$.

(1) Nel primo caso, questo vuol dire che per ogni $\varepsilon > 0$ cerchiamo di rendere vera $|(\sqrt{x+1} - 2) - (-1)| < \varepsilon$, che significa verificare la doppia disequazione

$$-\varepsilon < \sqrt{x+1} - 2 + 1 < \varepsilon$$

Questo è equivalente a dire

$$1 - \varepsilon < \sqrt{x+1} < 1 + \varepsilon$$

Ora facciamo una piccola precisazione: noi cerchiamo di dimostrare che $f(x)$ è vicino a l, cioè che la loro distanza, $|f(x) - l|$ è piccola, per questo motivo ci interessiamo solo a valori di $\varepsilon > 0$ che siano piccoli, diciamo minori di 1 in questo caso.

Detto questo capiamo che tutti i termini della disequazione sono positivi, quindi elevando tutto al quadrato otteniamo che

$$(1-\varepsilon)^2 < x+1 < (1+\varepsilon)^2$$

ovvero

$$(1-\varepsilon)^2 - 1 < x < (1+\varepsilon)^2 - 1$$

Adesso osserviamo che, essendo ε un valore piccolo, cioè compreso tra 0 ed 1, avremo che $(1-\varepsilon) < 1$, quindi $(1-\varepsilon)^2 - 1 < 0$ e lo chiamiamo $-\delta_1$, cioè $\delta_1 = 1 - (1-\varepsilon)^2 > 0$. Invece $1+\varepsilon > 1$, quindi $(1+\varepsilon)^2 - 1 > 0$ e chiamiamo questa quantità δ_2. Ci accorgiamo quindi che l'intorno che cercavamo è $I(0) = (-\delta_1; \delta_2)$. Nel caso si volesse trovare un intorno *circolare*, allora basterebbe capire chi dei due estremi è minore in modulo e, detto δ questo modulo, l'intorno cercato sarà $I_\delta(0) = (-\delta; \delta)$.

(2) In questo caso vogliamo che, preso $\varepsilon > 0$, valga

$$-\varepsilon < \frac{1}{x-1} - 1 < \varepsilon$$

cioè

$$1-\varepsilon < \frac{1}{x-1} < 1+\varepsilon$$

Ora osserviamo che se cerchiamo un intorno di $x_0 = 2$ potremo supporre di lavorare con numeri $x > 1$, quindi con $x - 1 > 0$, per cui possiamo riscrivere la disequazione come

$$\frac{1}{1+\varepsilon} < x-1 < \frac{1}{1-\varepsilon}$$

cioè

$$1 + \frac{1}{1+\varepsilon} < x < 1 + \frac{1}{1-\varepsilon}$$

Adesso dobbiamo fare l'ultimo passo per trasformare questa disequazione in qualcosa del tipo

$$2 - \delta_1 < x < 2 + \delta_2$$

che è quello che descrive un intorno di 2. Per farlo basterà aggiungere e sottrarre 1 ai due termini "laterali" della disequazione, ottenendo la su forma equivalente:

$$2 - \left(1 - \frac{1}{1+\varepsilon}\right) < x < 2 + \left(\frac{1}{1-\varepsilon} - 1\right)$$

Ecco allora che le parentesi ci forniscono

$$\delta_1 = 1 - \frac{1}{1+\varepsilon} > 0$$

$$\delta_2 = \frac{1}{1-\varepsilon} - 1 > 0$$

e l'intorno che cercavamo è $I(2) = (2 - \delta_1; 2 + \delta_2)$.

ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

(3) Come per i due esercizi precedenti, prendiamo $\varepsilon > 0$ un numero piccolo, e cerchiamo di capire per quali x vicini a $x_0 = 4$ si ha che

$$-\varepsilon < \log_2(x) - 4 - (-2) < \varepsilon$$

cioè

$$2 - \varepsilon < \log_2(x) < 2 + \varepsilon$$

che è equivalente a

$$2^{2-\varepsilon} < x < 2^{2+\varepsilon}$$

che riscriviamo per semplicità (usando le proprietà delle potenze) come

$$4 \cdot 2^{-\varepsilon} < x < 4 \cdot 2^{\varepsilon}$$

ci accorgiamo che quando ε è piccolo, 2^{ε} e $2^{-\varepsilon}$ sono poco più e poco meno di 1 rispettivamente, che vuol dire che $4\dot{2}^{\varepsilon}$ è poco più di 4, mentre $4 \cdot 2^{-\varepsilon}$ è poco mendo di 4. Aggiungendo e sottraendo la stessa quantità otteniamo che la disequazione può essere riscritta come

$$4 - (4 - 4 \cdot 2^{-\varepsilon}) < x < 4 + (4 \cdot 2^{\varepsilon} - 4)$$

e chiamando $\delta_1 = (4 - 4 \cdot 2^{-\varepsilon})$ e $\delta_2 = (4 \cdot 2^{\varepsilon} - 4)$ otteniamo l'intorno $I(4) = (4 - \delta_1; 4 + \delta_2)$.

(4) Prendiamo $\varepsilon > 0$ un valore piccolo e studiamo

$$-\varepsilon < e^{x+2} - e^5 < \varepsilon$$

$$e^5 - \varepsilon < e^{x+2} < e^5 + \varepsilon$$

$$\ln(e^5 - \varepsilon) < x + 2 < \ln(e^5 + \varepsilon)$$

$$\ln(e^5 - \varepsilon) - 2 < x < \ln(e^5 + \varepsilon) - 2$$

Aggiungendo e sottraendo 3 otteniamo

$$3 - (5 - \ln(e^5 - \varepsilon)) < x < 3 + (\ln(e^5 + \varepsilon) - 5)$$

dove ci accorgiamo che, per $\varepsilon > 0$ piccolo sarà $e^5 - \varepsilon$ un pochino meno di e^5, quindi $\ln(e^5 - \varepsilon)$ è un pochino meno di $\ln e^5 = 5$, quindi la prima parentesi è $\delta_1 = 5 - \ln(e^5 - \varepsilon) > 0$ e analogamente la seconda è $\delta_2 = \ln(e^5 + \varepsilon) - 5 > 0$, da cui l'intorno $I(3) = (3 - \delta_1; 3 + \delta_2)$.

(5)
Prendiamo $\varepsilon > 0$, allora studiamo

$$-\varepsilon < \frac{x^2 - 1}{x + 1} - (-2) < \varepsilon$$

e osserviamo che $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$, quindi

$$-\varepsilon < \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} - (-2) < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < x - 1 + 2 < \varepsilon$$

$$-1 - \varepsilon < x < -1 + \varepsilon$$

e qui basta scegliere $\delta = \delta_1 = \delta_2 = \varepsilon$ per ottenere l'intorno circolare $I_\delta(-1)$ in cui è vero che $|f(x) + 2| < \varepsilon$.

(6)
Prendiamo $\varepsilon > 0$, allora

$$-\varepsilon < \frac{3x^2 - x + 4}{x+5} - 2 < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{3x^2 - x + 4 - 2x - 10}{x+5} < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{3x^2 - 3x - 6}{x+5} < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < 3 \cdot \frac{x^2 - x - 2}{x+5} < \varepsilon$$

Per evitare conti troppo lunghi, studiamo le due disequazioni separatamente. Per quanto riguarda la seconda, cioè

$$3 \cdot \frac{x^2 - x - 2}{x+5} < \varepsilon$$

osserviamo che se ci interessiamo agli intorni di $x_0 = 2$ possiamo supporre $x > 1$, quindi $x+5 > 6$, quindi sarà anche vero che

$$3 \cdot \frac{x^2 - x - 2}{x+5} < 3 \cdot \frac{x^2 - x - 2}{6} = \frac{1}{2}(x^2 - x - 2)$$

perciò se dimostriamo che

$$\frac{1}{2} \cdot (x^2 - x - 2) < \varepsilon$$

segue direttamente la disequazione che volevamo. Risolvendo:

$$x^2 - x - 2 < 2\varepsilon$$

$$x^2 - x - 2(1+\varepsilon) < 0$$

disequazione di secondo grado, che possiamo risolvere passando all'equazione associata:

$$x^2 - x - 2(1+\varepsilon) = 0$$

che ha soluzioni $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 8(1+\varepsilon)}}{2}$, essendo $\varepsilon > 0$ un numero piccolo, ci accorgiamo che $\sqrt{1+8(1+\varepsilon)}$ è poco più di $\sqrt{1+8} = 3$, quindi la soluzione $x_2 = \dfrac{1 + \sqrt{1+8(1+\varepsilon)}}{2}$ è poco più di $\frac{4}{2}$, cioè 2. Allora capiamo che le soluzioni della disequazione dovranno essere comprese tra x_1 ed x_2 e, in particolare, minori di $x_2 = \dfrac{1 + \sqrt{1+8(1+\varepsilon)}}{2} = 2 + \left(\dfrac{1 + \sqrt{1+8(1+\varepsilon)}}{2} - 2 \right)$ con la parentesi che è proprio il nostro δ_2.

In modo analogo possiamo trattare la prima disequazione, osserviamo che se x è in un intorno di $x_0 = 2$, allora possiamo supporre $x < 4$, quindi

$$3 \cdot \frac{x^2 - x - 2}{x+5} > 3 \cdot \frac{x^2 - x - 2}{4+5} = \frac{1}{3}(x^2 - x - 2)$$

quindi se

$$\frac{1}{3}(x^2 - x - 2) > -\varepsilon$$

abbiamo anche la disequazione di partenza. Risolvendo

$$x^2 - x - 2 > -3\varepsilon$$
$$x^2 - x - 2 + 3\varepsilon > 0$$

Passiamo all'equazione associata, che ha soluzioni

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8 - 12\varepsilon}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9 - 12\varepsilon}}{2}$$

Osservando che $\varepsilon > 0$ è un valore piccolo, avremo che $9 - 12\varepsilon$ è poco meno di 9, quindi il numeratore di x_2 è poco meno di $1 + \sqrt{9} = 4$, cioè x_2 è poco meno di 2. Capiamo quindi che le soluzioni della disequazione che sono maggiori di $x_2 = 2 - \left(2 - \frac{1 + \sqrt{9 - 12\varepsilon}}{2}\right)$ sono quelle ce cercavamo, cioè se prendiamo $\delta_1 = \left(2 - \frac{1 + \sqrt{9 - 12\varepsilon}}{2}\right)$ abbiamo l'estremo sinistro del nostro intorno, che è $I(2) = (2 - \delta_1; 2 + \delta_2)$.

Esercizi

Studiamo il limite destro

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

e sinistro

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

per le seguenti funzioni:

- $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } \ x \geq 0 \\ -x, & \text{se } \ x < 0 \end{cases}$, in $x_0 = 0$;
- $f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{se } x \geq 1 \\ \dfrac{1}{x+3}, & \text{se } \ x < 1 \end{cases}$, in $x_0 = 1$;
- $f(x) = \begin{cases} \log(x + 2), & \text{se } \ x \geq -1 \\ -x^2, & \text{se } x < -1 \end{cases}$, in $x_0 = -1$;
- $x_0 = 2$, $f(x) = \sqrt{x - 2}$; (attenzione a questo esercizio!)

(1) Partiamo dal limite destro, cioè ci concentriamo su un intorno destro di $x_0 = 0$, quindi un intorno del tipo $(0; \delta)$, con $\delta > 0$ un valore piccolo. In questo caso ogni x che appartiene a questo intorno è positiva, quindi se studiamo $f(x)$ dovremo usare la forma definita per $x \geq 0$. In tal caso vediamo che $f(x) = x$, quindi è immediato capire che se x tende a 0 (da destra), il limite di f sarà 0. Per quanto riguarda il limite sinistro, studiamo un intorno del tipo $(-\delta; 0)$, in cui i valori di x sono tutti negativi, perciò dovremo usare la funzione $f(x) = -x$. In questo caso ancora ci accorgiamo che il limite sarà 0, infatti se vogliamo

$$|f(x) - 0| < \varepsilon$$

per qualche $\varepsilon > 0$ ci basta osservare che nel nostro intorno ciò significa

$$|-x| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x < 0$$

quindi preso $\delta = \varepsilon$ abbiamo che la disequazione è verificata.

(2) Come prima, consideriamo per primo l'intorno destro di $x_0 = 1$, cioè $(1, 1+\delta)$, con $\delta > 0$. Allora vuol dire che la funzione da usare è $f(x) = x + 2$ e, se x è "poco più" di 1, allora $f(x)$ sarà poco più di 3, quindi diciamo che

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$$

la dimostrazione è subito fatta:

$$|f(x) - 3| < \varepsilon$$
$$|x + 2 - 3| < \varepsilon$$
$$|x - 1| < \varepsilon$$

possiamo togliere il modulo in quanto $x > 1$, dato che sta in un intorno destro del punto, quindi

$$x < 1 + \varepsilon$$

e scegliendo $\delta = \varepsilon$ abbiamo la tesi.

Per l'intorno sinistro il discorso è simile, ma con conti leggermente più difficili: stiamo considerando un intorno del tipo $(1 - \delta; 1)$ quindi la funzione è $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$, ed essendo x poco meno di 1, allora $x + 3$ è poco meno di 4 e quindi $f(x)$ è poco più di $\frac{1}{4}$, quindi diciamo che

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{4}$$

Per dimostrarlo, osserviamo che

$$f(x) - \frac{1}{4} > 0$$

per il discorso fatto, quindi ci basta studiare

$$\frac{1}{x+3} - \frac{1}{4} < \varepsilon$$

cioè

$$\frac{1}{x+3} < \frac{1+4\varepsilon}{4}$$
$$\frac{4}{1+4\varepsilon} < x + 3$$

$$x > 1 - 4\left(1 - \frac{1}{1+4\varepsilon}\right)$$

cioè se prendiamo $\delta = 4\left(1 - \frac{1}{1+4\varepsilon}\right)$ abbiamo il nostro intorno sinistro $I^-(1) = (1-\delta; 1)$.

(3) Consideriamo l'intorno destro $I^+(-1) = (-1; -1+\delta)$ con $\delta > 0$, e osserviamo che in questo caso la funzione da studiare è $f(x) = \log(x+2)$. Se x appartiene a questo intervallo significa che x è poco più di -1, quindi $x+2$ è poco più di 1, quindi $\log(x+2)$ è poco più di $\log(1) = 0$. Allora la nostra supposizione sarà che

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = 0$$

Infatti, ci accorgiamo che (come prima togliamo il modulo in quanto $\log(x+2) > 0$ nel nostro intorno)

$$\log(x+2) < \varepsilon$$
$$x+2 < e^{\varepsilon}$$
$$x < -1 + (e^{\varepsilon} - 1)$$

quindi poniamo $\delta = e^{\varepsilon} - 1$ ed abbiamo la tesi.

Per l'intorno sinistro invece abbiamo $x \in I^-(-1) = (-1-\delta; -1)$ e quindi $f(x) = -x^2$. Essendo x poco meno di -1, avremo che x^2 sarà poco più di 1, quindi $f(x) = -x^2$ sarà poco meno di -1, perciò se dovessimo scommettere diremmo che

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = -1$$

ed in effetti se consideriamo $\varepsilon > 0$, allora

$$|-x^2 + 1| < \varepsilon$$

osserviamo che $-x^2$ è poco meno di 1, quindi la disequazione che dobbiamo risolvere è

$$-\varepsilon < -x^2 + 1 (< 0 < \varepsilon)$$

cioè

$$x^2 < 1 + \varepsilon$$
$$-\sqrt{1+\varepsilon} < x < \sqrt{1+\varepsilon}$$

la prima delle due parti della disequazione può essere scritta come

$$-1 - (\sqrt{1+\varepsilon} - 1) < x$$

che ci fornisce l'estremo sinistro dell'intorno che cercavamo cioè, ponendo $\delta = \sqrt{1+\varepsilon} - 1 > 0$, $I^-(-1) = (-1-\delta; -1)$.

(4) Iniziamo studiano l'intorno destro, cioè $I^+(2) = (2; 2+\delta)$, con $\delta > 0$. In questo caso stiamo lavorando con valori di x poco più grandi di 2, quindi $f(x) = \sqrt{x-2}$ sarà poco più grande di $\sqrt{2-2} = \sqrt{0} = 0$. Perciò diciamo che il limite destro della funzione è 0. In effetti osserviamo che, per $\varepsilon > 0$,

$$\sqrt{x-2} < \varepsilon$$

$$x - 2 < \varepsilon^2$$
$$x < 2 + \varepsilon^2$$

e chiamando $\delta = \varepsilon^2$ abbiamo il nostro intorno destro $I^+(2) = (2; 2 + \delta)$.

Per quanto riguarda l'intorno sinistro invece, osserviamo che stiamo considerando delle $x \in I^-(2) = (2 - \delta; 2)$, con $\delta > 0$, quindi valori di x per cui $x - 2 < 0$. Per queste x la funzione f non è definita, quindi non possiamo studiarne il limite sinistro.

Esercizi

Utilizzando la definizione di limite verificare che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

per

- $x_0 = +\infty$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $l = 0$;
- $x_0 = +\infty$, $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$, $l = 2$;
- $x_0 = -\infty$, $f(x) = e^x$, $l = 0$;
- $x_0 = -\infty$, $f(x) = \dfrac{x}{2+x^2}$, $l = 0$;

(1) Stiamo studiando un limite per x che tende a $+\infty$, quindi stiamo lavorando in un intorno sinistro di $+\infty$, cioè $I(+\infty) = (M; +\infty)$, con $M > 0$. Il nostro obiettivo è di dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ piccolo esiste un opportuno $M > 0$ per cui ogni x appartenente a $(M; +\infty)$ è tale che

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

Nel nostro caso $l = 0$ ed essendo $x > M > 0$ $f(x) > 0$, quindi possiamo togliere il modulo, e vogliamo dimostrare che

$$\frac{1}{x} < \varepsilon$$

Ma allora se scegliamo $M = \dfrac{1}{\varepsilon} > 0$ la disuguaglianza è vera $\forall x > M$, cioè per tutti gli $x \in I(+\infty) = (M; +\infty)$, da cui la tesi.

(2) Anche in questo caso vogliamo dimostrare che preso qualunque $\varepsilon > 0$ esiste un intorno sinistro di $+\infty$ per cui ogni x che vi è contenuto verifica $|f(x) - l| < \varepsilon$, cioè esiste $M > 0$ tale che ogni $x > M$ verifica quella disuguaglianza. Osserviamo che

$$|f(x) - 2| = \left| \frac{2x^2}{x^2+1} - 2 \right| = \left| \frac{2x^2 - 2x^2 - 2}{x^2+1} \right| = \left| \frac{2}{x^2+1} \right|$$

Essendo poi la frazione interna al modulo positiva, osserviamo che

$$\left|\frac{2}{x^2+1}\right| < \varepsilon \iff \frac{2}{x^2+1} < \varepsilon$$

cioè

$$x^2+1 > \frac{2}{\varepsilon}$$

$$x^2 > \frac{2}{\varepsilon} - 1$$

che ci dice che se $x > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon} - 1}$ è vero che $|f(x) - 2| < \varepsilon$, cioè se scegliamo $M = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon} - 1}$ allora l'intorno $I(+\infty) = (M; +\infty)$ è quello che cercavamo.

(3) In questo caso stiamo studiando un limite per x che tende a $-\infty$, quindi a differenza di prima cerchiamo un intorno del tipo $I(-\infty) = (-\infty; -M)$, con $M > 0$ opportuno per cui ogni x nell'intorno renda vero che $|f(x) - l| < \varepsilon$ per $\varepsilon > 0$ fissato. In particolare $l = 0$, quindi vogliamo che

$$e^x = |e^x| < \varepsilon$$

$$x < \ln \varepsilon$$

dove ricordiamo che per $\varepsilon > 0$ piccolo si ha che $\ln \varepsilon < 0$, quindi poniamo $M = -\ln \varepsilon$ ed abbiamo il nostro intorno.

(4) Anche in questo caso x tende a $-\infty$, quindi cerchiamo $M > 0$ tale che ogni $x \in (-\infty; -M)$ renda vero

$$\left|\frac{x}{2+x^2}\right| < \varepsilon$$

Per qualunque $\varepsilon > 0$ fissato. In questo caso lavoriamo con x negativi, quindi cerchiamo di dimostrare che

$$-\varepsilon < \frac{x}{2+x^2} (< 0 < \varepsilon)$$

quando $x < -M$ per $M > 0$ opportuno. Per farlo osserviamo che $2 + x^2 > x^2$, quindi $\frac{1}{2+x^2} < \frac{1}{x^2}$. Moltiplicando questa disequazione per x, che ricordiamo è negativo, quindi dovremo cambiare il verso della disequazione, otteniamo che

$$\frac{x}{2+x^2} > \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

Quindi se risolviamo $\frac{1}{x} > -\varepsilon$ avremo in automatico la soluzione della disequazione di prima, quindi:

$$\frac{1}{x} > -\varepsilon \iff \frac{1}{(-x)} < \varepsilon$$

che, ricordando che $-x > 0$, ci dice

$$-x > \frac{1}{\varepsilon}$$

ovvero $x < -\frac{1}{\varepsilon}$, cioè se prendiamo $M = \frac{1}{\varepsilon}$ abbiamo la tesi.

Esercizio: Si ha una situazione simile per la funzione $f(x) = -\frac{1}{x^2}$. Sapreste descrivere cosa succede vicino ad $x_0 = 0$ e ricavare la definizione di limite uguale a $-\infty$ che ne consegue?

In un intorno di 0, cioè in $I_\delta(0) = (-\delta; \delta)$, per $\delta > 0$, si ha che $f(x)$ diventa tanto più "negativo" (cioè più vicino a $-\infty$) quanto più x in questo intorno si avvicina ad $x_0 = 0$ (chiaramente con $x \neq 0$, non essendo f definita in x_0). Ad esempio, per $x = \frac{1}{2}$, $f(x) = -4$, per $x = \frac{1}{4}$, $f(x) = -16$, per $x = \frac{1}{16}$ $f(x) = -256$, e così via. Allora capiamo che il limite della funzione è $-\infty$, ovvero per qualsiasi valore $M > 0$ fissato possiamo dimostrare che esiste $\delta > 0$ tale che ogni $x \in I_\delta(0) = (-\delta; \delta)$ (diverso da 0) rende vera la disequazione

$$f(x) < -M$$

. Infatti, se vogliamo $-M > f(x) = -\frac{1}{x^2}$ allora vogliamo $x^2 < \frac{1}{M}$, cioè $|x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$, quindi preso $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ abbiamo l'intorno di 0 che cercavamo.

Ricaviamo quindi la definizione di

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

che indica la situazione in cui $\forall M > 0$ fissato, esiste $\delta > 0$ tale che $\forall x \in I_\delta(x_0) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ (con al più $x \neq x_0$) è vero che $f(x) < -M$.

Esercizi

Utilizzando la definizione di limite verificare che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

per

- $x_0 = 1$, $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, $l = +\infty$;
- $x_0 = 0$, $f(x) = \ln|x|$, $l = -\infty$;
- $x_0 = 0$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $l = \pm\infty$; (attenzione a questo esercizio!)

(1) Ricordiamo che dimostrare $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$ significa dimostrare che $\forall M > 0$ fissato, possiamo trovare un intorno di x_0 tale che ogni x in esso contenuto (con al più $x \neq x_0$) renda vera la disequazione $f(x) > M$.

In particolare, $f(x) > M \iff \frac{1}{(x-1)^2} > M$, cioè

$$(x-1)^2 < \frac{1}{M}$$

ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

$$-\frac{1}{\sqrt{M}} < x - 1 < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{M}} < x < 1 + \frac{1}{\sqrt{M}}$$

Quindi se prendiamo $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ abbiamo che ogni x nell'intorno $I_\delta(1) = (1-\delta; 1+\delta)$, tranne $x = 1$, rende vera la disequazione $f(x) > M$, da cui la tesi.

(2) In questo caso vogliamo dimostrare che $\forall M > 0$ fissato, possiamo trovare $\delta > 0$ tale che ogni $x \in I_\delta(0) = (-\delta; \delta)$, con $x \neq 0$, rende vera la disequazione $f(x) < -M$. Però sappiamo che

$$\ln|x| < -M$$

$$|x| < e^-M = \frac{1}{e^M}$$

cioè

$$-\frac{1}{e^M} < x < \frac{1}{e^M}$$

quindi basta scegliere $\delta = \frac{1}{e^M}$ e abbiamo finito.

(3) In questo caso dobbiamo fare attenzione, perché la funzione si comporta in modo diverso a sinistra ed a destra dell'origine, quindi dovremo considerare separatamente intorno destro ed introno sinistro.

Per l'intorno destro di 0, cioè in $I^+(0) = (0; \delta)$, per $\delta > 0$, ci accorgiamo che più x è piccolo, più $f(x)$ diventa grande, cioè va verso $+\infty$, infatti dimostriamo che

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

Per farlo dobbiamo mostrare che preso un qualsiasi $M > 0$ possiamo trovare $\delta > 0$ per cui ogni $x \in (0; \delta)$ verificano $f(x) > M$. Ma in questo caso è molto semplice vedere ce se $\delta = \frac{1}{M}$ e $0 < x < \delta$, allora

$$f(x) = \frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\frac{1}{M}} = M$$

da cui la tesi.

Per quanto riguarda l'intorno sinistro invece, cioè in $(-\delta; 0)$ con $\delta > 0$, succede una cosa analoga ma con un meno davanti. Detto un pochino meglio vediamo che per $-\delta < x < 0$, quando x si avvicina a 0 $f(x)$ si va sempre più verso $-\infty$, quindi dimostriamo che

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

cioè che per qualsiasi $M > 0$ fissato possiamo trovare un $\delta > 0$ tale che $\forall x \in (-\delta; 0)$ si ha $f(x) < -M$. Anche in questo caso la verifica è banale, in quanto

$$-M > f(x) = \frac{1}{x} \iff x > -\frac{1}{M}$$

Quindi, preso $\delta = \frac{1}{M}$ abbiamo l'intorno che cercavamo, e con questo la tesi.

ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

Esercizi

Utilizzando i limiti notevoli calcolare l tale che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

per

- $x_0 = 0,\ f(x) = \dfrac{2^x - 1}{3x}$;
- $x_0 = 0,\ f(x) = \dfrac{(1+x)^2 - 1}{x}$;
- $x_0 = 0,\ f(x) = e^x - 1$;
- $x_0 = 0,\ f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$; (attenzione a questo esercizio!)

(1) Il nostro scopo è "evidenziare" nella nostra funzione quelle parti che risultano uguali ai limiti notevoli che conosciamo. In particolare in questo esercizio si ha che

$$f(x) = \frac{2^x - 1}{3x} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2^x - 1}{x}\right)$$

e riconosciamo dentro la parentesi qualcosa della forma $\dfrac{a^x - 1}{x}$ che ha limite $\ln a$ per x che tende a 0, quindi

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim x \to 0 \left[\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2^x - 1}{x}\right)\right] = \frac{1}{3} \cdot \ln 2 = \frac{\ln 2}{3}$$

(2) In questo caso riconosciamo subito che il limite notevole del tipo

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = k$$

con k che nel nostro caso è 2. Allora possiamo subito dire che

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2$$

In questo caso la funzione somiglia molto al limite della forma

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

con la differenza che manca la x a denominatore. Allora moltiplicando e dividendo per x otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \left[x \cdot \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)\right] = \lim_{x\to 0} x \cdot 1 = 0$$

(in questo caso non era necessario usare i limiti notevoli, si poteva procedere per definizione dimostrando che per x che tende a 0, $e^x - 1$ ha limite 0).

ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

In questo esercizio ci accorgiamo che la funzione assomiglia molto al limite notevole

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

con la differenza che invece di tendere ad infinito, x tende a 0, e x ed $\frac{1}{x}$ sono "scambiati".

Ma ci accorgiamo allora che se x tende a 0, $\frac{1}{x}$ tende a $\pm\infty$ (si veda esercizio precedente), quindi se noi chiamiamo $y = \frac{1}{x}$, allora possiamo riscrivere il limite sostituendo $\frac{1}{y}$ ad x ed y a $\frac{1}{x}$, e il limite diventa

$$\lim_{y\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y$$

che è esattamente il limite notevole con la variabile che ha un nome diverso, perciò

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \underset{x=\frac{1}{y}}{=} \lim_{y\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e$$

Esercizi

Utilizzando il confronto tra infiniti ed infinitesimi calcolare l tale che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

per

- $x_0 = +\infty$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{3x}$;
- $x_0 = +\infty$, $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x^3}$;
- $x_0 = +\infty$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\log_3 x}$;
- $x_0 = 0$, $f(x) = \dfrac{(1+x)^2 - 1}{x}$; (attenzione: è lo stesso esercizio di poco fa, però dovreste provare a farlo con il confronto di infinitesimi)

(1) In questo caso osserviamo che $3x$ è un infinito di ordine superiore ad $\ln x$, quindi il limite tende a 0.

(2) In questo caso ci accorgiamo che $e^x - 1$ è un infinito di ordine pari a quello di e^x, che è superiore rispetto all'ordine di x^3, perciò il limite tende a $+\infty$.

(3) Anche in questo caso, ricordando che $\log_a x << x^b$ per $a, b > 0$, $a \neq 1$, quindi il limite tende a $+\infty$.

(4) In questo caso facciamo qualche conto:

$$f(x) = \frac{1 + x^2 + 2x - 1}{x} = \frac{x^2 + 2x}{x}$$

a numeratore ci accorgiamo che ci sono due infinitesimi, x^2 ed x, ma essendo x^2 infinitesimo di ordine superiore a x, cioè $x^2 << x$, allora il termine predominante sarà $2x$ che è dello stesso ordine di x, quindi il limite sarà determinato dal rapporto $\frac{2x}{x}$. Essendo questi due infinitesimi dello stesso ordine, ci accorgiamo che il loro rapporto è costante ed è pari a 2, quindi

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2$$

Esercizi finali

Risolvere i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 2^+} \left(\frac{\sqrt{x-2}}{2x} \right)$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(e^{\frac{1}{x}} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

$$\lim_{x\to -\infty} \left(1 - \frac{1}{1 - e^{3x}} \right)$$

$$\lim_{x\to 0} \left(1 - \frac{1}{1 - e^{3x}} \right)$$

$$\lim_{x\to 0} \left((1 - \cos x)^2 \right)$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x \ln\left(\frac{1}{x}\right)}}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)} \right]$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^{\frac{1}{2x}}}{\sin x} \right)$$

(1,1)

$$\lim_{x\to 2^+} \left(\frac{\sqrt{x-2}}{2x} \right)$$

In questo caso dobbiamo studiare il limite destro della funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{2x}$ e non ci stupisce il fatto che l'esercizio ci chiede di lavorare con x a destra di 2 in quanto a sinistra la funzione non è definita. Per risolvere il seguente limite ci sono diversi modi, il più breve è osservare che quando x tende a 0 il numeratore della funzione ha limite 0, come visto nell'esercizio (4) della sezione sui limiti destri e sinistri (pag. 18), mentre il denominatore tende a 4 (la dimostrazione può essere fatta per definizione, come nell'esercizio (1) della stessa sezione (pag. 17), con i dovuti aggiustamenti, ed è lasciata al lettore) A questo punto entrambi i limiti esistono e sono finiti, con il denominatore che non tende a 0, quindi abbiamo che

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to 2^+} f(x)}{\lim_{x\to 2^+} g(x)} = \frac{0}{2} = 0$$

(1,2)

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)^2$$

Per risolvere questo esercizio basta dimostrare che $1-\cos x$ ha limite 0 quando x tende a 0, poiché se ciò fosse vero, allora detta $f(x)=(1-\cos x)$ possiamo osservare che il limite di f, per x che tende a 0, esiste ed è finito, quindi

$$\lim_{x\to 0}(f(x)\cdot f(x)) = \lim_{x\to 0} f(x)\cdot \lim x\to 0 f(x) = (\lim_{x\to 0} f(x))^2 = (0)^2 = 0$$

Dimostriamo quindi che $(1-\cos x)$ ha limite 0 per x che tende a 0. Per farlo ci sono vari modi, ad esempio usando il limite notevole

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=\frac{1}{2}$$

Nel nostro caso ci accorgiamo che manca il denominatore, allora:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} x^2\cdot\frac{1}{2} = 0$$

da cui la tesi.

(2,1)

$$\lim_{x\to\infty}\left[e^{\frac{1}{x}}\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

In questo caso ci accorgiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

e quindi, dato che tutti e due i limiti esistono e sono finiti, il limite del loro prodotto è il prodotto dei loro limiti, cioè

$$\lim_{x\to+\infty}\left[e^{\frac{1}{x}}\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 1\cdot 0 = 0$$

Per dimostrare le nostre due affermazioni, possiamo procedere per definizione nel primo caso, osservando che $\forall\varepsilon>0$ fissato, $0<e^{\frac{1}{x}}-1<\varepsilon$ fintanto che $\frac{1}{x}<\ln 1+\varepsilon$, cioè se $x>\frac{1}{\ln 1+\varepsilon}$, quindi preso $M=\frac{1}{\ln 1+\varepsilon}$ abbiamo trovato l'intorno $M;+\infty)$ di $+\infty$ in cui $|f(x)-1|<\varepsilon$.

Per quanto riguarda la seconda affermazione possiamo procedere con i limiti notevoli, osservando che

$$\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

può essere riscritto ponendo $y=\frac{1}{x}$ come

$$\lim_{y\to 0}\sin y = \lim_{y\to 0}\left[y\cdot\left(\frac{\sin y}{y}\right)\right] = \lim_{y\to 0}(y\cdot 1) = 0$$

da cui la tesi.

ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

(2,2)

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x\ln\left(\frac{1}{x}\right)}}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}\right]$$

In questo caso ci conviene lavorare con i limiti notevoli, osservando che se moltiplichiamo e dividiamo per x, allora il limite può essere riscritto come

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x\ln\left(\frac{1}{x}\right)}}{x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)}\right]$$

A denominatore adesso ci accorgiamo che c'è

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

che riscriviamo sostituendo $y=\dfrac{1}{x}$ come

$$\lim_{y\to0^+}\frac{\sin y}{y}=1$$

Quindi il limite del denominatore esiste ed è finito. Per quanto riguarda il numeratore, ci accorgiamo che

$$x\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x\ln\left(\frac{1}{x}\right)}=x\cdot\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{\ln\frac{1}{x}}$$

e riconosciamo nelle parentesi quadre il limite notevole che restituisce e, quindi

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot e^{\ln\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)=1$$

ed essendo anche questo finito, possiamo dire che il limite che dovevamo risolvere all'inizio tende a $\frac{1}{1}$ cioè 1.

(3a,1)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{1-e^{3x}}\right)$$

Ci accorgiamo che quando x tende a $-\infty$, $\dfrac{1}{1-e^{3x}}$ ha limite 1, quindi il limite che dobbiamo risolvere è

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{1-e^{3x}}\right)=1$$

Dimostriamo la nostra affermazione, per farlo osserviamo che

$$\lim_{x\to-\infty}e^{3x}=0$$

ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

con dimostrazione analoga a quella fatta nell'esercizio (3) di pag. 20, quindi

$$\lim_{x\to-\infty}(1-e^{3x}) = 1-0 = 1$$

e perciò

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{1-e^{3x}}\right) = \frac{1}{1} = 1$$

da cui la tesi.

(3b,1)

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{1}{1-e^{3x}}\right)$$

In questo esercizio che sembra molto simile a quello precedente osserviamo che x tende a 0, non più a $-\infty$, quindi e^{3x} tende a 1, non più a 0, e $\dfrac{1}{1-e^{3x}}$ ha limite $+\infty$ se x tende a 0 da destra, e ha limite $-\infty$ se x tende a 0 da sinistra, quindi il risultato del limite sarà $-\infty$ o $+\infty$ rispettivamente nel primo e nel secondo caso.

(3,2)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}\right)$$

Anche in questo caso succederanno cose diverse a seconda che ci troviamo a destra o a sinistra di $x_0 = 0$. Iniziamo studiando l'intorno destro, cioè $(0;\delta)$ per $\delta > 0$. In questo caso osserviamo che $\dfrac{1}{2x}$ ha limite $+\infty$, come visto nell'esercizio (3) a pagina 22, quindi $e^{\frac{1}{2x}}$ avrà limite $+\infty$. Dato invece che il denominatore ha limite 0 per x che tende a 0, come visto nell'esercizio (2,1) di pagina 26. Dobbiamo in questo caso però fare attenzione, poiché non basta dire che $\sin(x)$ ha limite 0, ma dobbiamo osservare che, per x che tende a 0 da destra, il limite di $\sin x$ è 0^+, cioè per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che $0 < \sin x < \varepsilon$ se $0 < x < \delta$ per δ opportuno. Questo ci serve per stabilire che a denominatore abbiamo una quantità positiva, quindi il segno della frazione sarà lo stesso del numeratore, e quindi abbiamo che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

Per concludere studiamo l'intorno sinistro di 0, cioè consideriamo $x \in (-\delta; 0)$ per qualche $\delta > 0$. Allora ci accorgiamo che $\dfrac{1}{2x}$ ha limite $-\infty$, quindi $e^{\frac{1}{2x}}$ ha limite 0, per x che tende a 0, come succede anche per $\sin x$. Abbiamo quindi una forma di indeterminazione, che possiamo risolvere con un piccolo accorgimento: moltiplicando e dividendo per x osserviamo che

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left[\left(\frac{e^{\frac{1}{2x}}}{x}\right)\left(\frac{x}{\sin x}\right)\right] = \lim_{x\to 0^-}\left[\left(\frac{e^{\frac{1}{2x}}}{x}\right)\cdot 1\right]$$

riconoscendo nella seconda parentesi l'inverso del limite notevole

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.$$

A questo punto osserviamo che il limite iniziale sarà uguale a

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$$

Per risolverlo possiamo usare o un confronto degli ordini dei due infinitesimi, osservando che $e^{\frac{1}{2x}}$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a x, quindi il limite è 0.