ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

In questo fascicolo discutiamo alcune applicazioni degli integrali, già discussi dal punto di vista matematico nei fascicoli precedenti, alla fisica, con particolare attenzione alle applicazioni tipiche della prova di maturità.

Leggi del moto

Nel fascicolo sulle derivate in fisica abbiamo già discusso le relazioni fra le quantità che descrivono il moto di una particella. Ricordiamo che se $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ e $\vec{a}(t)$ sono le funzioni vettoriali che rappresentano rispettivamente posizione, velocità e accelerazione della particella al tempo t allora abbiamo che

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t)$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(t)$$

ovvero *la velocità è la derivata prima della posizione rispetto al tempo* mentre *l'accelerazione è la derivata prima della velocità rispetto al tempo*, e di conseguenza *la derivata seconda della posizione rispetto al tempo*.
Nel fascicolo relativo alle derivate in fisica avevamo quindi sfruttato questa relazione per ottenere, una volta nota la *legge oraria* del moto $\vec{r}(t)$ le altre due quantità. Grazie al *teorema fondamentale del calcolo integrale* possiamo ora ricavare la nostra legge oraria dalle altre quantità, a patto di conoscere sufficienti dati riguardanti allo stato del sistema in un determinato istante.
Notiamo che, come nel caso delle derivate, l'integrazione di una funzione vettoriale di variabile reale è intesa componente per componente: Se, per esempio $\vec{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con

$$\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$$

allora

$$\int_{t_0}^{t} \vec{f}(s)ds = \left(\int_{t_0}^{t} f_1(s)ds, \int_{t_0}^{t} f_2(s)ds, \int_{t_0}^{t} f_3(s)ds\right).$$

Dalla velocità alla posizione

Come descritto dalle relazioni precedenti, in questo caso, conosciamo la derivata di $\vec{r}(t)$, che risulta quindi essere **una** primitiva della funzione $\vec{v}(t)$. Per scegliere la primitiva adeguata abbiamo bisogno di conoscere la posizione iniziale $\vec{r}(t_0)$ della nostra particella. Sfruttando la funzione integrale con integranda $\vec{v}(t)$ otteniamo:

$$\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \int_{0}^{t} \vec{v}(s)ds - \int_{0}^{t_0} \vec{v}(s)ds = \int_{0}^{t} \vec{v}(s)ds + \int_{t_0}^{0} \vec{v}(s)ds = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(s)ds$$

dove nel secondo e nel terzo passaggio abbiamo sfruttato le proprietà dell'integrale definito riguardanti il dominio di integrazione. Da ciò otteniamo

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(s)ds + \vec{r}(t_0).$$

Possiamo quindi ricavare la legge oraria del moto, a patto di conoscere la legge della velocità e la posizione iniziale.

Dall'accelerazione alla posizione

In questo caso il procedimento è simile a quello precedente, ma questa volta avremo bisogno di più dati riguardanti il moto: in particolare ci serviranno sia la posizione che la velocità iniziale. Per prima cosa ricaviamo la legge della velocità $\vec{v}(t)$ dall'accelerazione $\vec{a}(t)$:

$$\vec{v}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(s)ds + \vec{v}(t_0)$$

A questo punto ci basterà quindi ripetere il procedimento del paragrafo precedente, ottenendo così

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \int_{t_0}^{t} \vec{v}(s)ds + \vec{r}(t_0) \\ &= \int_{t_0}^{t} \left[\int_{t_0}^{s} \vec{a}(u)du + \vec{v}(t_0) \right] ds + \vec{r}(t_0) \\ &= \int_{t_0}^{t} \left[\int_{t_0}^{s} \vec{a}(u)du \right] ds + \vec{v}(t_0)(t - t_0) + \vec{r}(t_0) \end{aligned}$$

Il doppio integrale nel primo termine non deve spaventarci: poichè $\int_{t_0}^{s} \vec{a}(u)du$ non è altro che una funzione l'intero termine è semplicemente una funzione integrale, con integranda $\int_{t_0}^{s} \vec{a}(u)du$.

L'equazione di Newton

Più spesso, anziché conoscere la velocità o l'accelerazione della nostra particella, avremo a disposizione solamente i dati iniziali $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ e $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$, la massa m della particella e la forza $\vec{F}(\vec{r})$ a cui la nostra particella è sottoposta. Qui la situazione è più spinosa: sappiamo dal secondo principio della dinamica che vale la seguente relazione fra la forza e l'accelerazione:

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = m\vec{a}(t)$$

In questo caso l'equazione di Newton definisce implicitamente la legge oraria $\vec{r}(t)$ attraverso una relazione fra la legge stessa e le sue derivate. Ricordando che l'accelerazione è la derivata seconda della posizione otteniamo

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = m\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(t)$$

Tale tipo di equazione è detto *equazione differenziale ordinaria.* Come nel caso esplicito trattato in precedenza tale informazione, da sola, non è sufficiente. Sarà infatti necessario considerare questa relazione assieme ai dati iniziali, ovvero il seguente *problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \vec{F}(\vec{r}(t)) = m\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(t) \\ \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 \\ \frac{d}{dt}\vec{r}(t_0) = \vec{v}_0 \end{cases}$$

La trattazione di questi oggetti matematici esula dallo scopo di questa lezione, ci limiteremo quindi a ricordare che per funzioni $\vec{F}$ sufficientemente regolari la soluzione di tale problema esiste ed è unica. Senza trattare il caso generale voglio mostrarvi un esempio di come si può risolvere un problema di questo tipo.

ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

Esempio (Forza elastica)**.** *Consideriamo una particella di massa m vincolata ad una retta e collegata ad una molla, di costante elastica k e fissata nell'origine. Trasciniamo la nostra particella fino alla posizione x_0 e la lasciamo libera di muoversi al tempo $t_0 = 0$: la sua legge oraria sarà soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} -\frac{k}{m}x(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) \\ x(0) = x_0 \\ \frac{d}{dt}x(0) = 0 \end{cases}$$

Stiamo quindi cercando una funzione la cui derivata seconda sia uguale a $-\frac{k}{m}$ volte la funzione stessa. La nostra conoscenza delle derivate[1] *ci suggerisce che*

$$x(t) = A\sin(Bt + C),$$

con le costanti A, B e C da determinare, sia una buona soluzione. Sostituendo nell'equazione differenziale otteniamo

$$-\frac{k}{m}A\sin(Bt + C) = -AB^2\sin(Bt + C)$$

da cui $B^2 = \frac{k}{m}$, ovvero $B = \sqrt{\frac{k}{m}}$.
Per trovare A e C sfruttiamo le condizioni iniziali: sostituendo la nostra possibile soluzione otteniamo

$$\begin{cases} A\sin(C) = x_0 \\ -A\sqrt{\frac{k}{m}}\cos(C) = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione otteniamo $C = \frac{\pi}{2}$. Sostituendo nella prima otteniamo infine $A = x_0$. La legge oraria cercata sarà quindi

$$x(t) = x_0\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{\pi}{2}\right) = x_0\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Integrali di linea e circuitazione

In fisica è frequentemente necessario studiare dei *campi vettoriali*, ovvero funzioni, eventualmente dipendenti dal tempo, che associano ad ogni punto dello spazio un vettore appartenente ad un certo spazio vettoriale, tipicamente uguale allo spazio fisico considerato. Una quantità spesso coinvolta nelle leggi fisiche è l'*integrale di linea* di tali campi lungo una curva $\mathcal{C}$. Se la curva è descritta dalla funzione $\vec{c}(t)$, con $t \in [t_0, t_1]$, tale integrale del campo $\vec{v}(\vec{r})$ è definito come

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{v} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{v}(\vec{c}(t)) \cdot \frac{d}{dt}\vec{c}(t)dt$$

Osserviamolo meglio: il dominio dell'integrale è lo stesso della curva, mentre la funzione integranda è il *prodotto scalare* fra il campo valutato nel punto e la derivata della curva, ovvero il vettore tangente ad essa nel punto.
Quando la curva $\mathcal{C}$ è chiusa, ovvero $\vec{c}(t_0) = \vec{c}(t_1)$ e non autointersecante, ovvero iniettiva su (t_0, t_1), tale integrale è detto *circuitazione* di $\vec{v}$ lungo $\mathcal{C}$. Adesso analizziamo alcune applicazioni di tale strumento.

[1]Ricordiamo infatti che la derivata seconda di $\sin(t)$ è $-\sin(t)$. Tale metodo risolutivo, ovvero intuire una possibile soluzione al problema e verificarne la correttezza a posteriori, è detto *Ansatz* (dal tedesco "approccio").

ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

Lavoro compiuto da una forza

Vi é sicuramente nota la definizione elementare di *lavoro compiuto da una forza* $\vec{F}$ *lungo uno spostamento* $\vec{s}$

$$\mathcal{L}_{\vec{s}}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

Tale definizione è molto limitante, essendo applicabile solo a forze costanti e cammini rettilinei. Grazie all'integrale di linea possiamo darne una definizione più appropriata: il lavoro compiuto da una forza $\vec{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lungo il cammino $\mathcal{S}$, descritto dalla funzione $\vec{s} : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ è dato dall'integrale (di linea) di $\vec{F}$ lungo $\mathcal{S}$, ovvero

$$\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\vec{F}) = \int_{\mathcal{S}} \vec{F} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(\vec{s}(t)) \cdot \frac{d}{dt}\vec{s}(t)dt$$

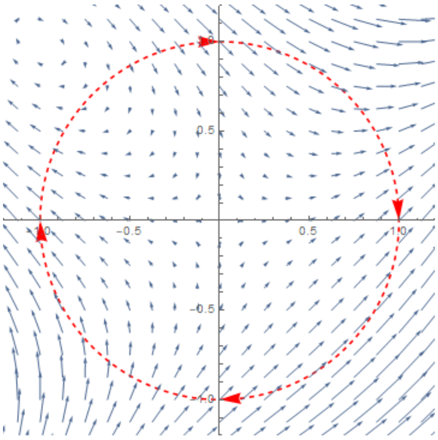

Figura 1: Grafico di $\vec{s}(t)$ (un cerchio) e $\vec{F}(x, y) = (x + y^2, x^2 - y)$

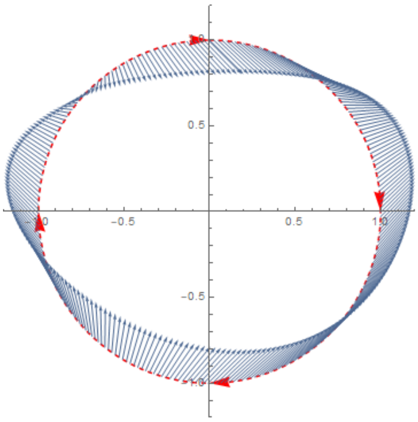

Figura 2: La restrizione del campo $\vec{F}$ al cerchio

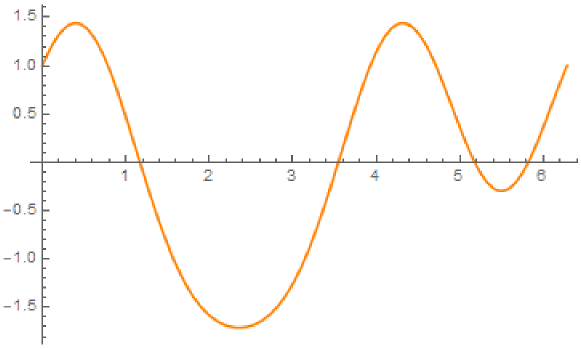

Figura 3: Grafico di $\vec{F}(\vec{s}(t)) \cdot \vec{s}(t)$

Esempio (La forza gravitazionale). *Come sappiamo, la forza gravitazionale è conservativa, ovvero la sua circuitazione lungo qualsiasi cammino chiuso è nulla. Dimostrare ciò è matematicamente abbastanza complesso, ma possiamo controllare se ciò è vero per cammini circolari attorno alla massa che genera il campo. Consideriamo una massa esploratrice* m_1 *su cui agisce il campo gravitazionale* $-\vec{G}(\vec{r}) = G\frac{m_2}{r^3}\vec{r}$ *generato da una massa* m_2 *centrata nell'origine. Il cammino circolare* $\mathcal{C}_R$ *di raggio* R *può essere parametrizzato dalla funzione*

$$\vec{c}_R(t) = (R\cos(t), R\sin(t), 0)$$

con derivata

$$\frac{d}{dt}\vec{c}_R(t) = (-R\sin(t), R\cos(t), 0)$$

ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

L'argomento dell'integrale risulta quindi essere

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{c}_R(t)) \cdot \frac{d}{dt}\vec{c}_R(t) &= m_1\vec{G}(\vec{c}_R(t)) \cdot \frac{d}{dt}\vec{c}_R(t) \\ &= -G\frac{m_1 m_2}{R^3}\vec{c}_R(t) \cdot \frac{d}{dt}\vec{c}_R(t) \\ &= -G\frac{m_1 m_2}{R^3}\left[-R^2\cos(t)\sin(t) + R^2\cos(t)\sin(t)\right] \\ &= 0\end{aligned}$$

Poichè la funzione integranda è costantemente nulla anche l'integrale sarà nullo, indipendentemente dal raggio R scelto.

Calcolo del potenziale di una forza conservativa

Come discusso nello scorso fascicolo, una forza conservativa $\vec{F}$ ammette potenziale, ovvero una funzione reale $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{R}) = \left(-\frac{\partial}{\partial x}V(x,y,z), -\frac{\partial}{\partial y}V(x,y,z), -\frac{\partial}{\partial z}V(x,y,z)\right)$$

Quello che non abbiamo detto l'ultima volta è come calcolare questa funzione V. Notiamo innanzitutto che, se lo spazio considerato ha una sola dimensione (come il caso di una particella vincolata ad una retta) l'equazione precedente si riduce a

$$F(x) = -\frac{d}{dx}V(x)$$

in questo caso notiamo subito che

$$V(x) - V(x_0) = -\int_{x_0}^{x} F(s)ds = -\mathcal{L}_{x-x_0}(F)$$

Questa relazione continua a valere anche in dimensione più alta: se $\vec{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ allora la differenza di energia potenziale[2] fra $\vec{r}_0$ ed $\vec{r}$ sarà data da

$$V(\vec{r}) - V(\vec{r}_0) = -\mathcal{L}_{\mathcal{C}(\vec{r}_0,\vec{r})}(\vec{F}) = -\int_{\mathcal{C}(\vec{r}_0,\vec{r})} \vec{F}$$

dove $\mathcal{C}(\vec{r}_0, \vec{r})$ è un *qualsiasi*[3] cammino (differenziabile) da $\vec{r}_0$ a $\vec{r}$.

[2] per ottenere la differenza di potenziale è sufficiente dividere per la carica (nel caso del campo elettrico) o la massa (nel caso del campo gravitazionale) della particella che subisce la forza.

[3] Poichè una forza è conservativa ha circuitazione nulla lungo ogni cammino chiuso è facile dimostrare che il lavoro compiuto dalla forza lungo un cammino non dipende dal cammino stesso, ma solo dagli estremi del cammino: consideriamo un cammino chiuso $\mathcal{C}$ e fissiamo su di esso due punti A e B. Ora consideriamo i due tratti del cammino, $\mathcal{C}_1$ che va da A a B e $\mathcal{C}_2$ che va da B ad A. Avremo quindi

$$0 = \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(\vec{F}) = \mathcal{L}_{\mathcal{C}_1}(\vec{F}) + \mathcal{L}_{\mathcal{C}_2}(\vec{F})$$

da cui

$$\mathcal{L}_{\mathcal{C}_1}(\vec{F}) = -\mathcal{L}_{\mathcal{C}_2}(\vec{F})$$

che vale anche deformando separatamente le due parti del cammino. Quindi il lavoro della forza lungo un cammino dipende solo dai suoi estremi.

ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

Esempio (Il potenziale del campo elettrostatico)**.** *Questo esempio, come tutti quelli in dimensione maggiore di 1, richiede l'utilizzo dell'integrale multiplo, ovvero integrare una funzione di più variabili rispetto ad ognuna di esse. Purtroppo approfondire questo aspetto richiederebbe molto tempo, quindi cercherò di darvi un'intuizione del metodo senza essere matematicamente preciso. Consideriamo una particella puntiforme di carica Q posizionata nell'origine del nostro sistema di riferimento. Questa genererà un campo elettrostatico la cui espressione è data dalla legge di Coulomb*

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{kQ}{r^3}\vec{r}$$

Per calcolarne il potenziale scegliamo il cammino rettilineo da $\vec{r}_0$ a $\vec{r}$:

$$\vec{c}(t) = (\vec{r} - \vec{r}_0)t + \vec{r}_0 \qquad t \in [0, 1]$$

con derivata rispetto a t

$$\frac{d}{dt}\vec{c}(t) = \vec{r} - \vec{r}_0$$

Il prodotto scalare fra $\vec{E}(\vec{c}(t))$ e la derivata del cammino risulta essere

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{c}(t)) \cdot \frac{d}{dt}\vec{c}(t) &= \frac{kQ}{|(\vec{r} - \vec{r}_0)t + \vec{r}_0|^3}\left[(\vec{r} - \vec{r}_0)t + \vec{r}_0\right] \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) \\ &= \frac{kQ}{\left[|\vec{r} - \vec{r}_0|^2 t^2 + |\vec{r}|_0^2 + 2\vec{r}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)t\right]^{3/2}}\left[|\vec{r} - \vec{r}_0|^2 t + \vec{r}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)t\right]\end{aligned}$$

Per rendere fattibile l'integrale ci basta notare che, chiamando

$$f(t) = |\vec{r} - \vec{r}_0|^2 t^2 + |\vec{r}|_0^2 + 2\vec{r}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)t$$

il prodotto precedente diventa

$$\vec{E}(\vec{c}(t)) \cdot \frac{d}{dt}\vec{c}(t) = \frac{1}{2}\frac{kQ}{[f(t)]^{3/2}}\frac{d}{dt}f(t) = \frac{d}{dt}\left[-\frac{kQ}{(f(t))^{1/2}}\right]$$

Notiamo che

$$f(0) = |\vec{r}_0|^2$$

$$f(1) = |\vec{r} - \vec{r}_0|^2 + 2\vec{r}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) + |\vec{r}_0|^2 = (\vec{r} + \vec{r}_0) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) + |\vec{r}_0|^2 = |\vec{r}|^2$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale abbiamo quindi

$$\begin{aligned}V(\vec{r}) - V(\vec{r}_0) &= -\int_{\mathcal{C}} \vec{E} \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt}\left[-\frac{kQ}{(f(t))^{1/2}}\right] \\ &= -\frac{kQ}{r} + \frac{kQ}{r_0}\end{aligned}$$

dove $r = |\vec{r}|$. Abbiamo quindi

$$V(r) = -\frac{kQ}{r} + C$$

dove C è una costante di integrazione da determinare. Imponendo che $\lim_{r \to +\infty} V(r) = 0$, ovvero che il potenziale si annulli a distanza infinita, otteniamo l'espressione che già conosciamo

$$V(r) = -\frac{kQ}{r}$$

ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

Integrale di superficie e flusso di un campo vettoriale

Un altro tipo di integrale rilevante in fisica è l'*integrale di superficie*: consideriamo un campo vettoriale $\vec{v}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ed una superficie Ω. Dobbiamo innanzitutto scegliere un'orientazione per Ω, ovvero dobbiamo scegliere quale delle due facce consideriamo "esterna" e quale "interna". Per fare ciò assegnamo ad ogni punto p di Ω un *versore normale* $\hat{n}(p)$, in modo che questi versori siano tutti diretti dallo stesso lato della superficie. Definiamo ora l'*integrale di superficie* o *flusso* di $\vec{v}$ attraverso Ω

$$\Phi_\Omega(\vec{v}) = \int_\Omega \vec{v} = \int_{p\in\Omega} \vec{v}(p)\cdot\hat{n}(p)dp$$

Il significato di questo integrale non è per niente chiaro. L'intuizione ci dice che stiamo sommando il modulo della componente perpendicolare ad superficie Ω del campo $\vec{v}$ rispetto ad ogni punto della superficie. Come si può, praticamente, calcolare questo integrale? È importante sapere che ogni superficie sufficientemente regolare può essere descritta, almeno localmente, da un'equazione del tipo $p = p(u,v)$, con u e v parametri appartenenti ad un sottoinsieme di $U \subset \mathbb{R}^2$.[4] Abbiamo quindi un integrale su un dominio U bidimensionale. Per fortuna, nella maggior parte dei casi, tale integrale si riduce a due integrazioni successive: prima rispetto ad u e poi rispetto a v (o viceversa): se, ad esempio, $U = [a,b]\times[c,d]$ avremo

$$\Phi_\Omega(\vec{v}) = \int_{p\in\Omega} \vec{v}(p)\cdot\hat{n}(p)dp = \int_a^b \left[\int_c^d \vec{v}(p(u,v))\cdot\hat{n}(p(u,v))J(u,v)du\right]dv$$

dove

$$J(u,v) = \left|\frac{\partial}{\partial u}p(u,v)\times\frac{\partial}{\partial v}p(u,v)\right|,$$

il modulo del prodotto vettore fra le derivate parziale in u e v di $p(u,v)$, è un fattore che ci dice quant'è l'area dell'elemento infinitesimo di superficie dp. In questo caso quando integriamo rispetto ad una variabile consideriamo l'altra come una costante, come abbiamo fatto per le derivate parziali. Inoltre, se il prodotto scalare fra il campo e il versore normale è costante in ogni punto della superficie avremo

$$\Phi_\Omega(\vec{v}) = \int_{p\in\Omega} K dp = K\int_{p\in\Omega} dp = K|\Omega|$$

Dove $|\Omega|$ è, per definizione, l'area della superficie. Lo studio degli *integrali multipli* richiederebbe un significativo approfondimento, purtroppo non realizzabile in queste poche pagine. Per rendere questo strumento più credibile vi propongo un esempio di facile esecuzione.

Esempio (Flusso di un campo costante attraverso un quadrato)**.** *Consideriamo un campo costante $\vec{v} = (0,k,k)$ ed una superficie di forma quadrata sul piano xy, centrata nell'origine e di lato 1, definita dalla seguente coppia di disequazioni, definita nel seguente modo*

$$\Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, -\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\le y\le\frac{1}{2}, z=0\right\}$$

A questo punto ogni punto $p\in\Omega$ può essere descritto dalla funzione

$$p(u,v) = (u,v,0) \qquad (u,v)\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\times\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$$

[4] Se ci pensate bene è proprio ciò che la rende una superficie: come una curva può essere descritta da un solo parametro, ed è quindi monodimensionale, così una superficie può essere descritta da due parametri, ed è quindi bidimensionale, come la nostra intuizione riguardo al mondo reale ci suggerisce.

da cui

$$J(u,v) = \left| \frac{\partial}{\partial u} p(u,v) \times \frac{\partial}{\partial v} p(u,v) \right| = |(1,0,0) \times (0,1,0)| = |(0,0,1)| = 1$$

Scegliamo ora l'orientazione di Ω: ad ogni punto p associamo il versore perpendicolare ad Ω e diretto verso il basso, ovvero $\hat{n}(p) = (0,0,-1)$. L'argomento dell'integrale sarà quindi

$$\vec{v}(p(u,v)) \cdot \hat{n}(p(u,v)) J(u,v) = (0,k,k) \cdot (0,0,1) = k$$

ovvero costante. Abbiamo quindi

$$\Phi_\Omega(\vec{v}) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} k du \right] dv = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} k dv = k.$$

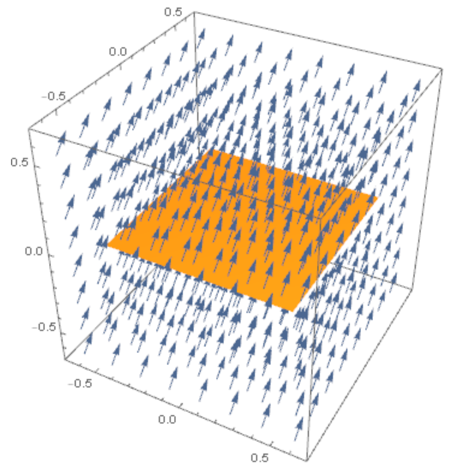

Figura 4: Il campo $\vec{v} = (0,1,1)$ e la regione di spazio Ω

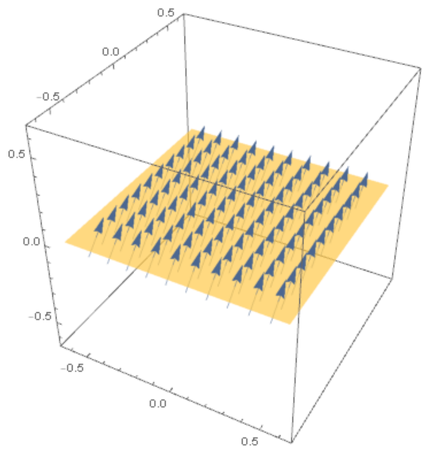

Figura 5: Il campo $\vec{v}$ che attraversa Ω

La legge di Faraday

Una classica applicazione del flusso di un campo vettoriale è la legge di Faraday: consideriamo un circuito chiuso orientato $\mathcal{C}$ e una qualsiasi superficie Ω con bordo $\mathcal{C}$. Come orientazione di Ω scegliamo quella data dalla regola della mano destra: le dita della mano si avvolgono nel verso del circuito e il pollice indica l'orientazione della superficie. Se il circuito è immerso in un campo magnetico $\vec{B}$ allora nel circuito scorre una corrente indotta, causata da una forza elettomotrice (differenza di potenziale) indotta pari a

$$V_i = -\frac{d}{dt} \Phi_\Omega(\vec{B})$$

Esplicitiamo l'integrale:

$$V_i = -\frac{d}{dt} \int_\Omega |\vec{B}| \cos \alpha dp$$

La dipendenza dal tempo di tale integrale può emergere da una o più delle seguenti componenti:

ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

- La forma del circuito $\mathcal{C}$, e quindi della superficie Ω, dipende dal tempo (potremmo, ad esempio, deformare il circuito applicandogli una forza)
- Il modulo $|\vec{B}|$ del campo magnetico dipende dal tempo
- L'angolo fra il campo e la superficie α cambia nel tempo (è, ad esempio, il caso di un circuito rotante immerso in un campo magnetico di direzione costante)

La legge di Gauss per il campo elettrostatico

Un'altra importante applicazione del concetto di flusso è la *legge di Gauss* per il campo elettrostatico: il flusso attraverso una superficie chiusa (ovvero che divide lo spazio in due parti, una interna ed una esterna alla superficie) del campo elettrostatico $\vec{E}$ è dato da

$$\Phi_\Omega(\vec{E}) = \frac{Q_{\text{tot}}}{\epsilon_0}$$

dove Q_{tot} è la carica totale contenuta nella parte dello spazio interna ad Ω mentre ϵ_0 è la *costante dielettrica del vuoto*. Oltre ad essere una delle quattro leggi di Maxwell, che descrivono completamente il comportamento del campo elettromagnetico dal punto di vista classico, è anche utile per calcolare il campo elettrostatico generato da distribuzioni di carica con particolari simmetrie spaziali.

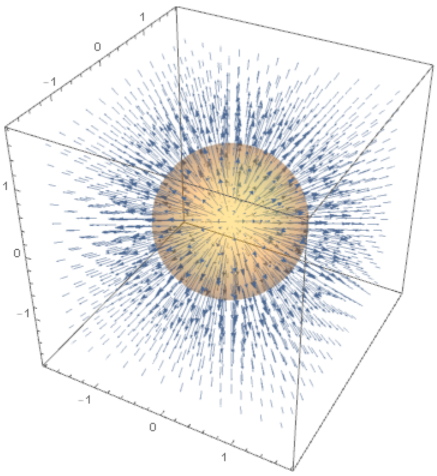

Figura 6: Il campo vettoriale $\vec{E}(\vec{r})$ generato dalla sfera carica uniformemente

Esempio (Campo elettrico generato da una distribuzione sferica di carica)**.** *Consideriamo una distribuzione sferica (piena) di carica di raggio R, centrata nell'origine e con densità volumica ρ,*[5] *e quindi carica totale $Q = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$. Per calcolare il campo generato sfrutteremo la legge di Gauss: consideriamo una famiglia di sfere $S_r(0)$, centrate nell'origine e di raggio r. Data la simmetria sferica della distribuzione di carica il campo sarà sempre diretto radialmente rispetto all'origine, quindi parallelamente ai versori normali alle superfici considerate. Inoltre, sempre per simmetria, sarà costante in modulo a parità di distanza dall'origine. Otteniamo quindi*

$$\Phi_{S_r(0)}(\vec{E}) = |\vec{E}(r)||S_r(0)| = |\vec{E}(r)|4\pi r^2 = \frac{Q_{tot}}{\epsilon_0}$$

A questo punto distinguiamo 2 casi:

- *$r \leq R$: abbiamo $Q_{tot} = \rho\frac{4}{3}\pi r^3 = Q\frac{r^3}{R^3}$, da cui $|\vec{E}(r)| = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$*
- *$r > R$: la carica contenuta in $S_r(0)$ è uguale alla carica totale della distribuzione Q, da cui $|\vec{E}(r)| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$.*

[5] Espressa in $\frac{C}{m^3}$

Vale la pena di notare due cose:

- *Nonostante il modulo del campo si comporti in maniera diversa all'interno e all'esterno della distribuzione è una funzione continua del raggio*

$$\lim_{r\to R^-} |\vec{E}(r)| = \lim_{r\to R^+} |\vec{E}(r)| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

- *per $r \geq R$ il campo è identico a quello generato da una carica puntiforme posizionata nell'origine.*

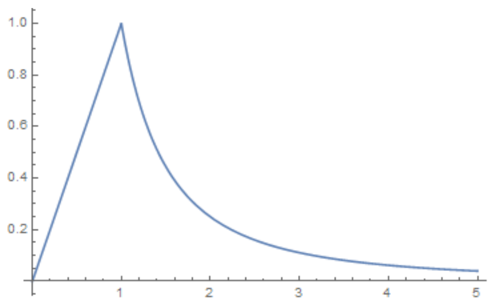

Figura 7: Il grafico della funzione $\left|\vec{E}(|\vec{r}|)\right|$

Esercizi

1. Calcolare la legge oraria relativa ai seguenti dati:
   (a) $v(t) = 2t^2$, $x(0) = 0$
   (b) $a(t) = 2$, $v(0) = 2$, $x(0) = 2$
   (c) $\vec{a}(t) = (0, -9.8)$, $\vec{v}(0) = (1, 1)$, $\vec{x}(0) = (0, 0)$
2. Calcolare il lavoro compiuto lungo un cammino Γ rappresentato dalla funzione $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$, con $t \in [0, 2\pi)$, dal campo gravitazionale generato da una particella di massa 1.
3. Calcolare il potenziale delle seguenti forze:
   (a) $F(x) = 2xe^{x^2+4}$, $k \in \mathbb{R}$
   (b) $F(x) = \log x$
   (c) $F(x) = \frac{k}{x}$, $k \in \mathbb{R}$
4. Calcolare il flusso del campo gravitazionale generato da una massa m posizionata nell'origine attraverso una sfera di raggio 1, anch'essa centrata nell'origine.