Soluzioni

1. (a) $x(t) = \int_0^t v(s)ds + x(0) = \int_0^t 2s^2 ds + 0 = \frac{2}{3}t^3$

   (b) $v(t) = \int_0^t a(s)ds + v(0) = 2t + 2$, da cui
   $x(t) = \int_0^t v(s)ds + x(0) = \int_0^t [2s+2]ds + 2 = t^2 + 2t + 2$

   (c) Cerchiamo la legge oraria componente per componente:

$$(v_x(t), v_y(t)) = \left(\int_0^t a_x(s)ds + v_x(0), \int_0^t a_y(s)ds + v_y(0)\right) = (1, -9.8t + 1)$$

$$(x(t), y(t)) = \left(\int_0^t v_x(s)ds + x(0), \int_0^t v_y(s)ds + y(0)\right) = \left(t, -\frac{9.8}{2}t^2 + t\right)$$

2. Il campo gravitazionale generato da una particella puntiforme di massa 1 è dato da:

$$\vec{G}(\vec{r}) = -\frac{G}{r^3}\vec{r}$$

. Il lavoro compiuto da $\vec{G}$ su una particella di massa m è dato da

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\gamma(\vec{F}) &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \frac{d}{dt}\gamma(t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{Gm}{(\cos^2(t) + \sin^2(t))^{\frac{3}{2}}}(\cos(t), \sin(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t))\right] dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left[-Gm\left(-\cos(t)\sin(t) + \sin(t)\cos(t)\right)\right] dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left[-Gm0\right] dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

3. Ricordandoci che in $\mathbb{R}$ ogni cammino senza autointersezioni è un intervallo ci basterà calcolare una primitiva della forza: tutti i potenziali relativi alla stessa forza differiranno per una costante C.

   (a) $V(x) = -\int F(x)dx = -\int 2xe^{x^2+4}dx = -e^{x^2+4} + C$

   (b) $V(x) = -\int \log(x)dx = -x(\log(x) - 1) + C$ (la forza, così come il potenziale, è definita per $x > 0$)

   (c) $V(x) = -\int \frac{k}{x}dx = -\log(|x|^k) + C$

4. Notiamo che, a meno di una costante, il campo gravitazionale $\vec{G}(\vec{r})$ generato da una massa m è identico al campo elettrico generato da una carica q: infatti, se $k = -\frac{4\pi\epsilon_0 Gm}{q}$ abbiamo:

$$k\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{4\pi\epsilon_0 Gm}{q}\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\vec{r} = -\frac{Gm}{r^3}\vec{r} = \vec{G}(\vec{r})$$

A questo punto ci basta sfruttare la legge di Gauss per il campo elettrostatico:

$$\Phi_{S_1(0)}(\vec{G}) = \int_{S_1(0)} \vec{G} = \int_{S_1(0)} k\vec{E} = k\int_{S_1(0)} \vec{E} = -\frac{4\pi\epsilon_0 Gm}{q}\frac{q}{\epsilon_0} = -4\pi Gm$$

Lo stesso identico ragionamento può essere ripetuto per ogni altra superficie chiusa: vale infatti la *legge di Gauss per il campo gravitazionale*: il flusso del campo gravitazionale attraverso ad una superficie chiusa S è dato da

$$\Phi_S(\vec{G}) = -4GM,$$

dove M è la massa totale contenuta all'interno della superficie.