Soluzione Esercizi

- Calcolare l'area sottesa dal grafico della funzione $f(x) = x^2 + 2x + 3$, nell'intervallo $[0, 1]$ e nell'intervallo $[1, 3]$.

  Soluzione:
  Nell'intervallo $[0, 1]$:

  $$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^2 + 2x + 3dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_0^1 =$$
  $$= \frac{1^3}{3} + 1^2 + 3 \cdot 1 - \left(\frac{0^3}{3} + 0^2 + 3 \cdot 0\right) = \frac{13}{3}$$

  Mentre nell'intervallo $[1, 3]$:

  $$\int_1^3 f(x)dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_1^3 = \frac{27}{3} + 9 + 9 - \frac{1}{3} - 1 - 3 = \frac{68}{3}$$

- Calcolare l'area sottesa dal grafico di $f(x) = 1 + x^2$, dell'esempio di pagina 2, in $[0, 1]$ e verificare che è $\frac{4}{3}$.

  Soluzione:

  $$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 1 + x^2dx = \left[x + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$$
  $$= 1 + \frac{1}{3} - 0 - \frac{0}{3} = \frac{4}{3}$$

- Consideriamo

  $$f(x) = -x + 1$$

  e calcoliamo gli integrali

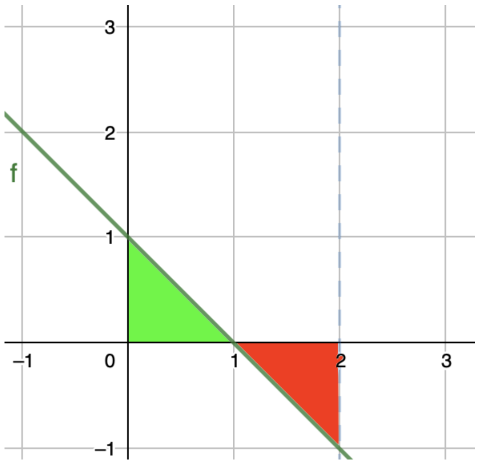
  $$\int_a^b f(t)dt$$

  per

  1. $a = 0$, $b = 1$;
  2. $a = 1$, $b = 2$;
  3. $a = 0$, $b = 2$;

ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

Calcolare poi l'area della regione di piano delimitata dal grafico di $f(x)$ e dall'asse x in $[0, 2]$ (osservando che in realtà la figura che si viene a delineare è composta da due triangoli rettangoli), confrontando il risultato con i valori calcolati ai punti precedenti.



Soluzione: Cominciamo calcolando gli integrali:

1. $$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 -x + 1dx = \left[-\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$
2. $$\int_1^2 f(t)dt = \left[-\frac{x^2}{2} + x\right]_1^2 = -\frac{4}{2} + 2 + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$
3. $$\int_0^2 f(t)dt = \left[-\frac{x^2}{2} + x\right]_0^2 = -\frac{4}{2} + 2 = 0$$

Per quanto riguarda l'area osserviamo che la figura è composta da due triangoli rettangoli, entrambi con cateti di lunghezza pari a 1, quindi le due aree sono:

$$A_{verde} = A_{rossa} = \frac{cateto \cdot cateto}{2} = \frac{1}{2}$$

e quindi l'area totale della figura è

$$A = A_{verde} + A_{rossa} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Ci accorgiamo quindi che, in accordo con quanto detto in precedenza,

$$A_{verde} = +\int_0^1 f(t)dt, \text{perché la curva sta “sopra” l'asse } x$$

$$A_{rossa} = -\int_1^2 f(t)dt, \text{perché la curva sta “sotto” l'asse } x$$

e l'integrale in $[0, 2]$ è la somma delle aree con segno, cioè

$$\int_0^2 f(t)dt = A_{verde} - A_{rossa}$$

- Calcolare l'area sottesa dalla curva di equazione $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$, con
  1. $f(x) = x(3x+1)^2$ e $a = 0, b = 2$;
  2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x}$ e $a = 1, b = 2$;
  3. $f(x) = e^x + e^{-x}$ e $a = 0, b = 1$;
  4. $f(x) = \sin(2x)$ e $a = \dfrac{\pi}{2}, b = \pi$;
  5. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$ e $a = 1, b = \sqrt{2}$.

Soluzione:

1.
$$\int_0^2 x(3x+1)^2 dx = \int_0^2 x(9x^2 + 1 + 6x)dx = \int_0^2 9x^3 + x + 6x^2 =$$
$$\left[\frac{9x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 2x^3\right]_0^2 = 36 + 2 + 16 = 54$$

2.
$$\int_1^2 \frac{x^2 - 3x + 1}{x} dx = \int_1^2 x - 3 + \frac{1}{x} dx =$$
$$= \left[\frac{x^2}{2} - 3x + \ln|x|\right]_1^2 = 2 - 6 + \ln 2 - \frac{1}{2} + 3 + \ln 1 = \frac{3}{2} + \ln 2$$

3.
$$\int_0^1 e^x + e^{-x} dx = \left[e^x - e^{-x}\right]_0^1 = e^1 - e^{-1} + 1 - 1 = \frac{e^2 - 1}{e}$$

4.
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(2x) = \left[-\frac{\cos(2x)}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{\cos(2\pi)}{2} + \frac{\cos(\pi)}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

5.
$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{2\sqrt{1 - (\frac{x}{2})^2}} dx = \left[\arcsin\frac{x}{2}\right]_1^{\sqrt{2}} =$$
$$= \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$$

- Calcolare l'area compresa tra le curve $f(x)$ e $g(x)$ con

  1. $f(x) = \frac{3}{x}$ e $g(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$;
  2. $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$;
  3. $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = \frac{1}{2}$, nell'intervallo $[0, \pi]$;
  4. $f(x) = \frac{2}{x}$ e $g(x) = -\frac{8}{9}x^2 + \frac{26}{9}x$.
  5. $f(x) = -\frac{4}{9}x^2 + \frac{8}{3}x$ e $g(x) = x$.

  Soluzione:

  1. In questo caso disegniamo i grafici di f e g, dove la prima è un'iperbole, mentre la seconda è una retta:

Per prima cosa ora dobbiamo trovare i punti di intersezione A e B, che poi ci forniranno gli estremi di integrazione, e per trovarli dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} y = \frac{3}{x} \\ y = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{3}{x} \\ \frac{3}{x} = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{3}{x} \\ 6 = -3x^2 + 9x \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases}$$

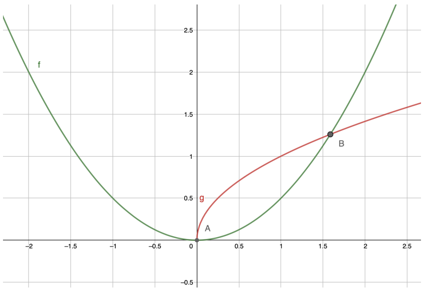
$$\begin{cases} y = \frac{3}{x} \\ x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \end{cases}$$

Troviamo quindi $x_A = 1$ e $x_B = 2$. Per determinare i punti dovremmo trovare la coordinata y sostituendo i due risultati nella prima equazione, ma a noi in realtà servono solo le x. A questo punto dal grafico capiamo che tra A e B la curva f sta sopra alla curva g, quindi l'area misurerà:

$$\int_{x_A}^{x_B} f(x) - g(x)dx = \int_1^2 -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2} - \frac{3}{x}dx = \left[-\frac{3x^2}{4} + \frac{9x}{2} - 3\ln|x|\right]_1^2 =$$

$$= -3 + 9 - 3\ln(2) + \frac{3}{4} - \frac{9}{2} + 3\ln(1) = \frac{9}{4} - 3\ln(2)$$

2. Anche in questo caso facciamo un veloce grafico, accorgendoci che $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ è una parabola con asse verticale mentre $g(x) = \sqrt{x}$ è un ramo di una parabola con asse orizzontale:



Ci accorgiamo dal grafico che un punto di intersezione è l'origine, che infatti appartiene ad entrambe le curve (come faccio a verificarlo?), mentre l'altro sarà una delle due soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$$

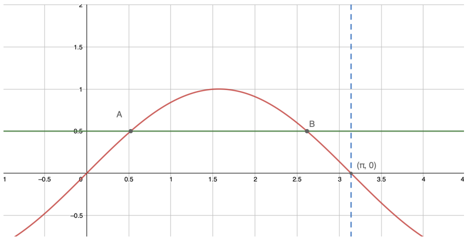
$$\begin{cases} 2y = x^2 \\ y^2 = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y = y^4 \Rightarrow y = \sqrt[3]{2} \\ y^2 = x \Rightarrow x = \sqrt[3]{4} \end{cases}$$

che è il punto $B = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$. L'intervallo di integrazione sarà quindi $[0, \sqrt[3]{4}]$, intervallo in cui la curva g è maggiore a f, quindi l'area sarà:

$$\int_0^{\sqrt[3]{4}} g(x) - f(x)dx = \int_0^{\sqrt[3]{4}} \sqrt{x} - \frac{x^2}{2}dx = \left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^3}{6}\right]_0^{\sqrt[3]{4}} = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} - 0 + 0 = \frac{2}{3}$$

3. Disegniamo il grafico delle due curve $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = \frac{1}{2}$ e poi concentriamoci sull'intervallo $[0, \pi]$:



In questo caso le intersezioni sono i punti, con ascissa compresa tra 0 e π, soluzioni del sistema

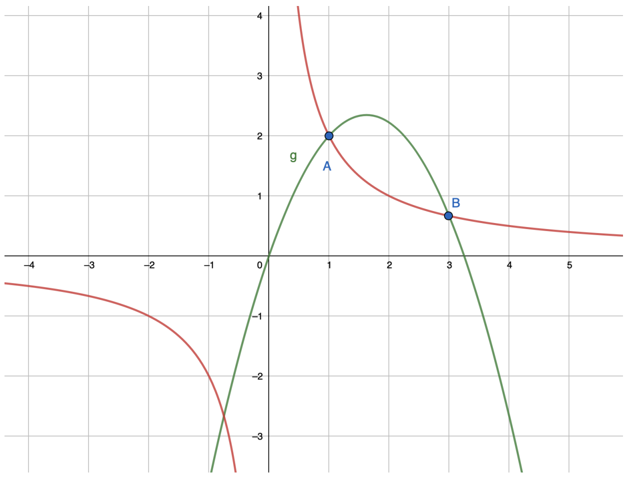
$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2} \\ y = \sin(x) \end{cases} \Rightarrow x = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$$

Quindi le soluzioni sono $x_1 = \dfrac{\pi}{6}$ e $x_2 = \dfrac{5\pi}{6}$ (tutte le altre soluzioni del sistema, cioè $x_1 + 2k\pi$ e $x_2 + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{R}$, non appartengono all'intervallo che ci interessa), allora, visto che nell'intervallo $[x_1, x_2]$ la funzione f è maggiore di g, l'area sarà

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) - g(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \sin(x) - \frac{1}{2}dx = \Big[-\cos(x) - \frac{x}{2}\Big]_{x_1}^{x_2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

4. Disegniamo l'iperbole $f(x) = \dfrac{2}{x}$ e la parabola $g(x) = -\dfrac{8}{9}x^2 + \dfrac{26}{9}x$:



In questo caso le soluzioni del sistema sono

$$\begin{cases} y = \dfrac{2}{x} \\ y = -\dfrac{8}{9}x^2 + \dfrac{26}{9}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{2}{x} \\ \dfrac{2}{x} = -\dfrac{8}{9}x^2 + \dfrac{26}{9}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{2}{x} \\ 18 = -8x^3 + 26x^2 \end{cases}$$

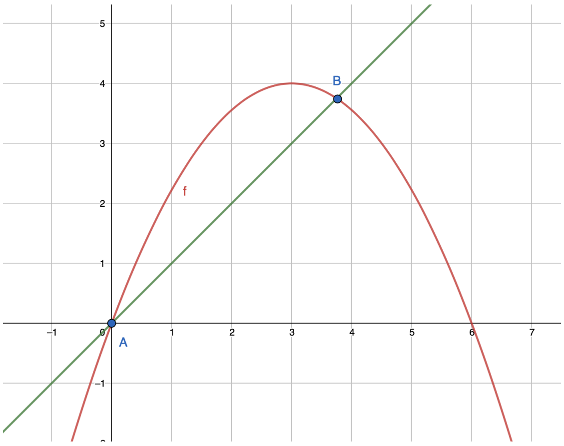
$$\begin{cases} y = \dfrac{2}{x} \\ 4x^3 - 13x^2 + 9 = 0 \Rightarrow (x-1)(4x^2 - 9x - 9) \end{cases}$$

Quindi abbiamo una soluzione data da $x = 1$ mentre le altre due sono $x_{1,2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{81+144}}{8} = \dfrac{9 \pm 15}{8}$ che ci danno $x_1 = -\dfrac{3}{4}$ e $x_2 = 3$, dove x_1 non ci interessa dato che noi ci concentriamo sulla regione di piano limitata, quindi quella nell'intervallo $[1, 3]$. Allora essendo g maggiore di f in quell'intervallo:

$$\int_1^3 g(x) - f(x) dx = \left[-\frac{8}{27}x^3 + \frac{13}{9}x^2 - 2\ln|x| \right]_1^3 =$$

$$= -8 + 13 - 2\ln(3) + \frac{8}{27} - \frac{13}{9} + 2\ln(1) = \frac{104}{27} - 2\ln 3$$

5. Disegniamo le due curve $f(x) = -\dfrac{4}{9}x^2 + \dfrac{8}{3}x$ e $g(x) = x$



che in questo caso sono una parabola ed una retta, le cui intersezioni possono essere trovate risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = x \\ y = -\dfrac{4}{9}x^2 + \dfrac{8}{3}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x \\ 9x = -4x^2 + 24x \end{cases}$$

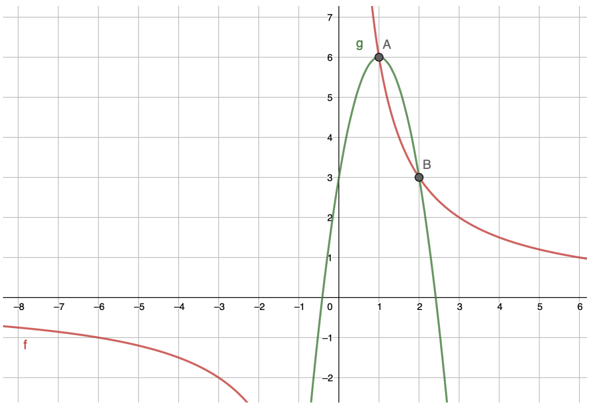
$$\begin{cases} y = x \\ 4x^2 - 15x = 0 \end{cases}$$

Le cui soluzioni sono i punti $A = (0, 0)$ e $B = \left(\frac{15}{4}, \frac{15}{4}\right)$, quindi l'area sarà

$$\int_0^{\frac{15}{4}} f(x) - g(x)dx = \left[-\frac{4}{27}x^3 + \frac{5}{6}x^2\right]_0^{\frac{15}{4}} =$$

$$= -\frac{4}{27} \cdot \frac{15^3}{4^3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{15^2}{4^2} = -\frac{5^3}{16} + \frac{5^3 \cdot 3}{32} = \frac{125}{32}$$

- Per calcolare l'area compresa tra le due curve di equazione $xy = 6$ e $y = -3x^2 + 6x + 3$ cerchiamo i loro punti di intersezione e per farci un'idea della situazione disegniamo il grafico delle due curve (la prima un'iperbole e la seconda una parabola):



Le intersezioni le possiamo trovare risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{6}{x} \\ y = -3x^2 + 6x + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{6}{x} \\ \frac{6}{x} = -3x^2 + 6x + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{6}{x} \\ 6 = -3x^3 + 6x^2 + 3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{6}{x} \\ x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1)(x-2) = 0 \end{cases}$$

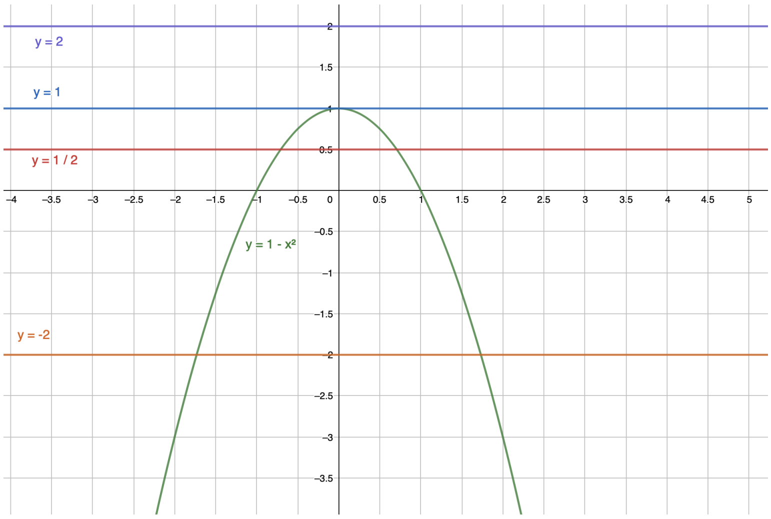
quindi le soluzioni sono i punti di ascisse $x_{1,2} = \pm 1$, e $x_3 = 2$, con x_2 che, come nel caso precedente, non ci interessa considerare visto che noi studiamo la regione limitata, contenuta nell'intervallo $[x_1, x_3] = [1, 2]$. A questo punto, osservando che la parabola sta sopra l'iperbole in quell'intervallo, abbiamo che

$$\int_1^2 -3x^2 + 6x + 3 - \frac{6}{x} dx = \left[-x^3 + 3x^2 + 3x - 6\ln|x|\right]_1^2 =$$

$$= -8 + 12 + 6 - 6\ln(2) + 1 - 3 - 3 + 6\ln(1) = 5 - 6\ln(2)$$

- Determinare il valore di $k \in \mathbb{R}$ tale che la misura dell'area della regione di piano compresa tra la parabola $y = 1 - x^2$ e la retta $y = k$ sia pari a 3.

  Soluzione: Osserviamo che perché le due curve si incontrino deve essere $k < 1$, in quanto per $k > 1$ la retta è troppo in alto e non incontra la parabola, mentre per $k = 1$ la retta passa per il vertice, quindi la regione di piano è costituita da un solo punto, quindi con area nulla (e in particolare diversa da 3).



  Tenendo a mente questa condizione, risolviamo il sistema

$$\begin{cases} y = k \\ y = 1 - x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = k \\ k = 1 - x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1-k} \end{cases}$$

ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

E l'area sarà data da

$$\int_{-\sqrt{1-k}}^{+\sqrt{1-k}} 1-x^2-kdx = \left[(1-k)x-\frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{1-k}}^{+\sqrt{1-k}} =$$

$$= (1-k)\sqrt{1-k}-\frac{\sqrt{(1-k)^3}}{3}+(1-k)\sqrt{1-k}-\frac{\sqrt{(1-k)^3}}{3} =$$

$$= 2(1-k)\sqrt{1-k}-2(1-k)\frac{\sqrt{1-k}}{3} = 2(1-k)\left(1-\frac{1}{3}\right)\sqrt{1-k}$$

Perché questo sia uguale a 3 deve essere

$$\frac{4}{3}(1-k)\sqrt{1-k} = 3$$

$$16(1-k)^2(1-k) = 81$$

$$(1-k)^3 = \frac{81}{16}$$

Quindi $k = 1-\sqrt[3]{\frac{81}{16}}$.