ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

Soluzione degli esercizi

Soluzione dell'esercizio 1. L'affermazione è falsa. Come controesempio, consideriamo la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$ nella Figura 3. Il punto $x_0 = 0$ è un punto di non derivabilità, ma $f'_+(0) = f'_-(0) = +\infty$, come vediamo nella Figura 4. L'affermazione corretta è dunque la seguente: "Per stabilire che x_0 è un punto di non derivabilità per una funzione f, è equivalente verificare che $x_0 \in \mathrm{dom}(f) \setminus \mathrm{dom}(f')$ oppure che il limite destro e sinistro del rapporto incrementale di f in x_0 non coincidono *oppure sono infiniti*."

Soluzione dell'esercizio 2. Per dei grafici di queste funzioni di $x_0 = 0$ basta osservare le figure da 1 a 6 nel fascicolo.

1. Osserviamo innanzitutto che, poiché n è pari, il dominio della funzione è $[x_0, +\infty)$, dunque potremo calcolare solo la derivata destra della funzione in x_0. Riscriviamo $\sqrt[n]{x - x_0} = (x - x_0)^{\frac{1}{n}}$ e applichiamo la formula della derivata prima ottenendo

$$f'(x) = \frac{1}{n} \cdot (x - x_0)^{\frac{1}{n} - 1} = \frac{1}{n\sqrt[n]{(x - x_0)^{n-1}}}.$$

Poiché n è pari, $n - 1$ è dispari; il punto x_0 non è un punto di derivabilità in quanto $f'_+(x_0) = +\infty$.

2. L'esercizio è analogo al precedente; semplicemente in questo caso essendo n dispari avremo che il dominio della funzione sarà tutto $\mathbb{R}$ e che $n - 1$ sarà pari. In definitiva il punto x_0 non è di derivabilità in quanto $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = +\infty$.

3. Anche qui il discorso è simile ai precedenti. La presenza del modulo sotto radice implica che il dominio della funzione è tutto $\mathbb{R}$, dunque potremo calcolare sia la derivata destra che quella sinistra. La derivata prima della funzione è

$$f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{|x - x_0|^{n-1}}} \cdot \mathrm{sgn}(x - x_0),$$

dove sgn è la funzione *signum* di x, ovvero la derivata prima del modulo di x (vedi la Figura 2). Il punto x_0 non è dunque di derivabilità in quanto $f'_+(x_0) = +\infty$ e $f'_-(x_0) = -\infty$.

4. Scriviamo $p(x) = (x - x_0)\, q(x)$, dove q, dal momento che la molteplicità della radice x_0 è 1, non ha x_0 come radice. La sua derivata è

$$p'(x) = q(x) + (x - x_0) \cdot q'(x).$$

Osserviamo che p' *non* ha come radice x_0, altrimenti dovremmo poter raccogliere $(x - x_0)$ anche da q, contro quello che abbiamo appena detto. Avremo dunque che $p'(x_0) = k$, dove $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. La derivata di $f(x) = |p(x)|$ è

$$f'(x) = |p'(x)| \cdot \mathrm{sgn}(p(x)).$$

Supponendo ora per esempio che p sia negativa prima di x_0 e positiva poi, si ha dunque che $f'_+(x_0) = k$ mentre $f'_-(x_0) = -k$, e dunque x_0 è un punto di non derivabilità.
In realtà, non è necessario che il polinomio abbia due radici distinte! Per esempio, considera $p(x) = x^3 - 1$, la cui unica radice reale è $x_0 = 1$; tracciando il grafico del suo modulo vedrai subito che in tale punto la funzione non è derivabile. E' invece necessario che la molteplicità

ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

della radice sia 1; in caso contrario, come abbiamo visto, la derivata di p avrebbe ancora x_0 come radice e si annullerebbe. Come esempio di ciò, considera $p(x) = x^2 - 2x + 1$, che ha come unica radice (doppia) $x_0 = 1$. Il modulo di p, che coincide con p stesso, è derivabile in tale punto.

Osservazione. Abbiamo anche dimostrato che nessuna radice singola può essere un punto di massimo, minimo o flesso a tangente orizzontale di un polinomio, perché lì la derivata prima non si annulla. Rigirando quanto appena detto, abbiamo dimostrato di fatto che un polinomio con radice x_0 ha un punto di massimo, minimo o flesso a tangente orizzontale in x_0 se, e solo se, tale radice ha molteplicità maggiore o uguale a 2.

Soluzione dell'esercizio 3. Partiamo notando che f' continua significa che

$$\lim_{x\to {x_0}^-} f'(x) \;=\; f'(x_0) \;=\; \lim_{x\to {x_0}^+} f'(x)$$

per ogni $x \in \operatorname{dom}(f')$. Riscriviamo f' come limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{x\to {x_0}^-}\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \;=\; \lim_{x\to {x_0}^+}\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right).$$

A sinistra, sto prendendo il limite per $x \to {x_0}^-$ del limite per $h \to 0$. Lascio a te concludere che questo limite è esattamente la derivata sinistra di f in x_0. Analogamente, il membro a destra rappresenta la derivata destra, e i due valori sono perciò coincidenti.

1. Osserviamo innanzitutto che il dominio della funzione è $x > -3$. La derivata prima della funzione è

$$f'(x) \;=\; 20x^3 - 4x + 6 + 2x \cdot \ln 7 \cdot 7^{x^2-5} + \frac{1}{\ln 2 \cdot (x+3)} - \left(6x^2 + 2x\right) \cdot \cos 2x^3 + x^2 - 2$$

   che è una funzione continua in quanto somma di funzioni continue, e dunque f è derivabile in tutto il suo dominio.

2. Questo esercizio non è che la generalizzazione del punto precedente: le funzioni citate sono tutte composizioni di funzioni continue le cui derivate sono ancora composizioni di funzioni continue, e perciò ogni f scrivibile in questo modo è derivabile nel suo dominio.

Soluzione dell'esercizio 4. Per ogni $x \neq 0$ la derivata della funzione f è

$$f'(x) \;=\; 2x \cdot \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

Questa funzione è derivabile in $x_0 = 0$ in quanto

$$f'(0) \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} \;=\; \lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h} \;=\; 0.$$

Tuttavia, f' non è continua in 0 perché il suo limite per $x \to 0$ non esiste.

Soluzione dell'esercizio 5. Ricordando i limiti che abbiamo già calcolato nell'Esercizio 2, le prime due funzioni presentano un flesso a tangente verticale, la terza una cuspide, mentre la quarta dei punti angolosi.

ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

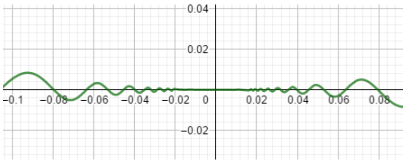

Figura 8: Il grafico di f

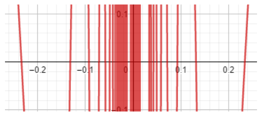

Figura 9: Il grafico della derivata di f

Soluzione dell'esercizio 6. Non ho inserito nell'elenco il caso in cui f' presenti una discontinuità essenziale perché, come abbiamo visto nell'Esercizio 4, questo tipo di discontinuità della derivata prima non assicura l'esistenza di un punto di non derivabilità per la funzione di partenza. L'affermazione seguente, per come è formulata, è vera, con una precisazione: non abbiamo infatti gli strumenti per affermare che un punto di discontinuità essenziale sia *certamente* un punto di derivabilità di f; sappiamo solo che non è detto che sia un punto di non derivabilità.

Soluzione dell'esercizio 7. La derivata prima di f in entrambi i casi vale $n\,(x - x_0)^{n-1}$. Il punto x_0 è l'unico estremante per tutte e due le f dal momento che è l'unico punto in cui la derivata prima si annulla.

1. Se n è pari, dunque $n - 1$ è dispari, il segno della derivata prima sarà negativo prima di x_0 e positivo dopo, e siamo di fronte a un minimo. Per avere un massimo, basta prendere $f(x) = -\,(x - x_0)^n$.

2. Se n è dispari, dunque $n - 1$ è pari, il segno della derivata prima sarà positivo sia prima che dopo x_0, e siamo di fronte a un flesso a tangente orizzontale.

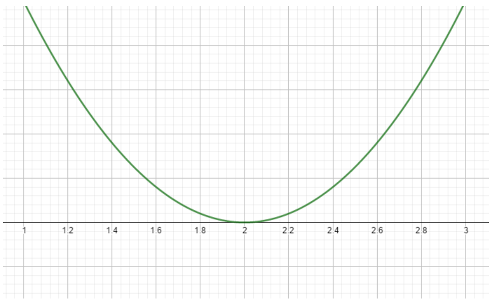

Figura 10: Il grafico di $f(x) = (x - 2)^2$

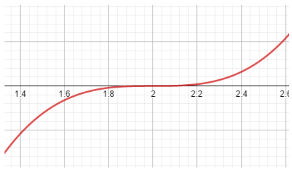

Figura 11: Il grafico di $f(x) = (x - 2)^3$

Soluzione dell'esercizio 8. La derivata prima di f è $f'(x) = \ln(a)a^x$, che è sempre positiva, dunque la funzione è strettamente crescente. La derivata seconda è $f''(x) = \ln^2(a)a^x$, che chiaramente è di nuovo sempre crescente, dunque la funzione non cambia concavità.

Soluzione dell'esercizio 9. Cerchiamo innanzitutto un'approssimazione della funzione $f(x) = e^x$ in un intorno del punto $x_0 = 0$. Sappiamo che la derivata n-esima di f è sempre e^x; in particolare, $f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 1$. Per approssimare la f con un polinomio di grado n, della forma $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, dovremo imporre che le derivate di ordine n di f e del polinomio siano coincidenti. In particolare, poiché la derivata n-esima di x^n è $n\,(n-1)\,(n-2)\ldots = n!$, imponendo $a_n n! = f^{(n)}(0)$ si ottiene che $a_n = \frac{1}{n!}$, formula valida $\forall n$. Otteniamo l'uguaglianza

$$e^x \;=\; 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

In particolare, sostituendo $x = 1$,

$$e \ = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots$$

Se vogliamo una stima di e con errore minore di 0,001, dovremo arrivare fino a $n = 6$, e avremo $e \approx 2,71806$.