ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

Il problema della derivabilità — una lezione con Michele

Nella lezione precedente avevamo dato una definizione, quella di derivata di una funzione $f(x)$ in un punto x_0, aggiungendo una locuzione: "quando questo limite esiste ed è finito". Abbiamo visto che può essere che ciò non accada: per esempio, le funzioni degli Esercizi 1.6 e 1.7 nei punti $x_0 = 0$ e $x_0 = 1$ rispettivamente. Ma questo, se ci pensiamo, è del tutto naturale: il rapporto incrementale, a x_0 fissato, è una funzione nella variabile h, e sappiamo che in generale ci sono funzioni che non ammettono alcuni limiti, quindi perché questa dovrebbe fare eccezione? Diamo dunque una definizione più precisa.

Definizione 1. Una funzione $f(x)$ si dice *derivabile* in un punto $x_0 \in \text{dom}(f)$ se esiste finito il limite del rapporto incrementale in x_0. Dato un sottoinsieme $A \subset \text{dom}(f)$, f si dice *derivabile* in A se lo è in ogni suo punto. Nel caso in cui A coincida con $\text{dom}(f)$ stesso, si dice semplicemente che f è *derivabile*.

Osservazione. Ricordando il discorso che avevamo fatto l'altra volta, f derivabile in x_0 significa che esiste la retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$, ovvero che f è approssimabile linearmente vicino a x_0.

La funzione derivata prima di f è definibile solo nei punti in cui f è derivabile (altrimenti non sappiamo che cosa significhi $f'(x_0)$!), i quali costituiscono chiaramente un sottoinsieme del dominio di f che potrebbe non coincidere col dominio stesso, ma esserne strettamente incluso: in altre parole, $\text{dom}(f') \subseteq \text{dom}(f)$. Ma questo, nella pratica, significa che alcuni degli eventuali punti "problematici", o per meglio dire i punti in cui f è *non derivabile*, andranno cercati nell'insieme $\text{dom}(f) \setminus \text{dom}(f')$: ci toccherà perciò calcolare il C.E. anche di f'. A questo proposito, riguarda l'Esercizio 1.6: ora sai che la derivata prima di $f(x) = \sqrt{x}$ è $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; il punto $x_0 = 0$, che apparteneva al dominio di f, non appartiene più al dominio di f' - e infatti non si poteva calcolare la derivata in quel punto!

Dal momento che la richiesta che esista finito il limite del rapporto incrementale per $h \to 0$ potrebbe essere troppo forte, possiamo pensare che ne esista una sua versione meno restrittiva, in analogia con quanto accade per la definizione di esistenza del limite stesso e per quella di continuità in un punto. Abbiamo perciò le seguenti definizioni.

Definizione 2. Una funzione f si dice *derivabile da destra* in $x_0 \in \text{dom}(f)$ se esiste finito il limite del rapporto incrementale in x_0 per $h \to 0^+$. Analogamente, f si dice *derivabile da sinistra* in $x_0 \in \text{dom}(f)$ se esiste finito il limite del rapporto incrementale in x_0 per $h \to 0^-$. Se f è derivabile da destra (o da sinistra) in x_0, i numeri reali

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$
$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

si dicono rispettivamente *derivata destra* e *derivata sinistra* di f in x_0.

Così come, quando limite destro e sinistro esistono e coincidono ciò implica che il limite esiste, e quando f è continua in x_0 da destra e da sinistra ciò implica che f è continua in x_0, abbiamo questo teorema.

Teorema 1. *Una funzione f è derivabile in $x_0 \in \text{dom}(f)$ se, e solo se, è derivabile sia da destra che da sinistra in x_0 e la derivata destra e sinistra in x_0 coincidono.*

Infine, notiamo un'ultima cosa. Perché f sia derivabile da destra (o da sinistra) in x_0, il limite del rapporto incrementale in x_0 per $h \to 0^+$ (o $h \to 0^-$) deve necessariamente presentarsi come una forma di indecisione del tipo "$\frac{0}{0}$": se il numeratore non fosse nullo, infatti, il limite sarebbe infinito e non esisterebbe la derivata in quel punto. In altre parole, per avere derivabilità in x_0 deve necessariamente verificarsi che

$$\lim_{h \to 0^+} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = 0$$
$$\lim_{h \to 0^-} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = 0.$$

In particolare, essendo $f(x_0)$ indipendente da h, possiamo portarlo fuori dal limite e al secondo membro dell'equazione, ottenendo

$$\lim_{h \to 0^+} f(x_0 + h) \;=\; f(x_0) \;=\; \lim_{h \to 0^-} f(x_0 + h),$$

che non è che un'altra maniera per dire che f è continua in x_0. Ne segue quest'altro teorema.

Teorema 2. *Se una funzione f è derivabile in un punto $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$, allora è anche continua in quel punto.*

Osservazioni.

1. Il discorso con cui abbiamo introdotto questo teorema non conta come dimostrazione, è solo per aiutarti a capirne il senso! Fai riferimento al tuo libro di testo per le dimostrazioni di questo e del precedente.

2. Nota che, a differenza del primo teorema, non ho scritto "se e solo se". La continuità in un punto, infatti, è una condizione necessaria, *ma non sufficiente* per la derivabilità in quel punto. Prova a pensare a qualche controesempio, ovvero a una funzione continua in un punto ma non derivabile lì (spoiler: ne abbiamo già vista una nell'altra lezione!).

Abbiamo dunque fornito un primissimo setaccio per individuare i punti di non derivabilità di una funzione: sicuramente lo saranno quelli in cui la funzione non è continua, e anche i punti di $\mathrm{dom}(f) \setminus \mathrm{dom}(f')$. Nei prossimi paragrafi, vedremo come lo studio della funzione derivata prima può aiutarci enormemente nel classificare questi punti particolari, e anche per molto altro. Prima di passarci, però, risolvi questi esercizi.

Esercizi

Esercizio 1. Dimostra, oppure confuta con un opportuno controesempio, la seguente affermazione: "Per stabilire che x_0 è un punto di non derivabilità per una funzione f, è equivalente verificare che $x_0 \in \mathrm{dom}(f) \setminus \mathrm{dom}(f')$ oppure che il limite destro e sinistro del rapporto incrementale di f in x_0 non coincidono". Nel caso in cui l'affermazione sia falsa, correggila in modo da renderla vera.

Esercizio 2. Verifica che le seguenti funzioni non sono derivabili nei punti x_0 (aiutati con degli esempi e qualche disegno!):

1. $f(x) = \sqrt[n]{x - x_0}$ con $n \in \mathbb{N}$ *pari*.

2. $f(x) = \sqrt[n]{x - x_0}$ con $n \in \mathbb{N}$ *dispari* maggiore o uguale a 3.

3. $f(x) = \sqrt[n]{|x - x_0|}$ con $n \in \mathbb{N}$ maggiore o uguale a 2.

4. $f(x) = |p(x)|$, dove $p(x)$ è un generico polinomio che abbia almeno due radici distinte, e x_0 sia una di quelle radici di molteplicità 1. E' necessario che le radici siano almeno due per avere un punto di non derivabilità? In caso affermativo, fornisci un esempio di un polinomio con una sola radice il cui valore assoluto sia derivabile nella sua radice (è più semplice di quanto pensi!).

Esercizio 3. Data una funzione $f(x)$ con derivata prima $f'(x)$, dimostra che tutti i punti in cui f' è continua sono punti in cui f è derivabile. Stabilisci poi se le seguenti funzioni sono derivabili su tutto il loro dominio verificando se la loro derivata prima è continua:

1. $f(x) = 5x^4 - 2x^2 + 6x - 1 + 7^{x^2-5} + \log_2(x+3) - \sin(2x^3 + x^2 - 2)$.

2. $f(x) = p_1(x) + a^{p_2(x)} + \log_b(p_3(x)) + g(p_4(x))$, dove p_1, p_2, p_3 e p_4 sono polinomi qualunque, $a, b \in \mathbb{R}$ e $g(x)$ è una qualunque funzione goniometrica elementare (seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante).

Osservazione. Non è invece vero che se f è derivabile in un punto x_0, allora f' è continua in x_0. Uno degli esempi classici è la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

derivabile nel punto $x_0 = 0$, in cui però f' non è continua.

Esercizio

Esercizio 4. Dimostra quanto detto nell'osservazione precedente.

Lo studio della funzione derivata prima: la continuità di f'

In questa sezione e nella successiva ci occuperemo di far notare come lo studio di alcune caratteristiche della funzione derivata prima di f possano fornirci informazioni preziose su f stessa. Inizieremo discutendo il legame tra gli eventuali punti di discontinuità di f' e la natura dei punti di non derivabilità di f: l'Esercizio 3 infatti ci suggerisce che, oltre ai punti in cui f' non è definita, candidati a essere punti problematici sono tutti i punti in cui f' non è continua. Può succedere che:

1. f' presenti una discontinuità di prima specie (o "a salto") in x_0. In tal caso, f avrà due tangenti diverse in x_0, una a sinistra e una destra, che avranno coefficiente angolare rispettivamente $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$. Questi sono detti *punti angolosi* di f;

2. f' presenti una discontinuità asintotica in x_0; in particolare, se la derivata destra e sinistra tendono entrambe a "infinito con lo stesso segno", esisterà la retta tangente in quel punto, ma avrà "coefficiente angolare infinito", ovvero sarà verticale (in questo caso di parla di *flesso a tangente verticale*); se invece la derivata destra e sinistra tendono a "infiniti discordi", si avrà quella che si chiama *cuspide*.

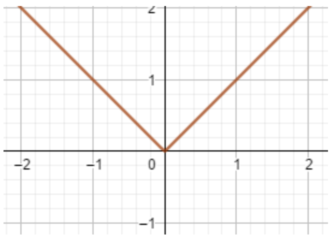
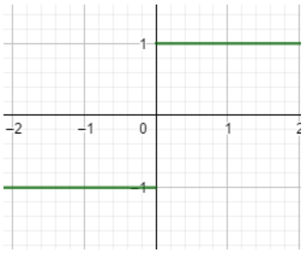



Figura 1 & 2: Grafico della funzione $f(x) = |x|$ la cui derivata è

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0, \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

La derivata prima presenta una discontinuità di tipo salto nell'origine, a cui corrisponde un punto angoloso nella f.

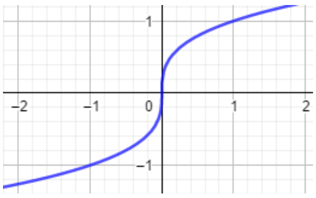
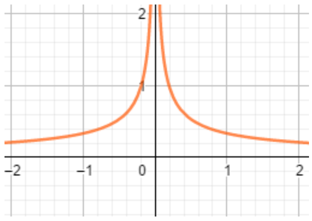



Figura 3 & 4: Grafico della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$, la cui derivata è la funzione $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. La derivata prima presenta una discontinuità asintotica nell'origine, a cui corrisponde un flesso a tangente verticale

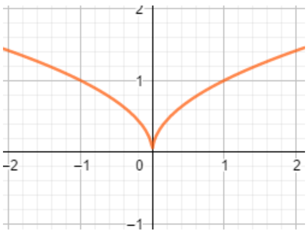
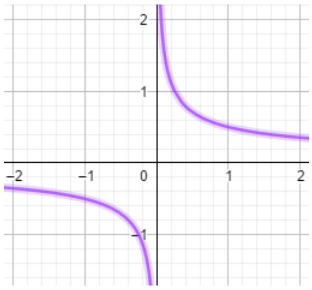



Figura 5 & 6: Grafico della funzione $f(x) = \sqrt{|x|}$, la cui derivata prima è la funzione

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & x \geq 0, \\ -\frac{1}{2\sqrt{x}} & x < 0. \end{cases}$$

La derivata prima presenta una discontinuità asintotica con limiti a infinito discordi, a cui corrisponde una cuspide

Osservazione. La funzione derivata prima <u>*non può avere discontinuità eliminabili*</u>: è una conseguenza del *Teorema di Darboux*, che però esula dall'argomento della dispensa.

Chiaramente sono possibili casi spuri, ovvero che la derivata sia da un lato finita e dall'altro infinita; questo tipo di punto di non derivabilità però non ha un nome specifico.

Esercizi

Esercizio 5. Classifica i punti di discontinuità delle funzioni dell'Esercizio 2.

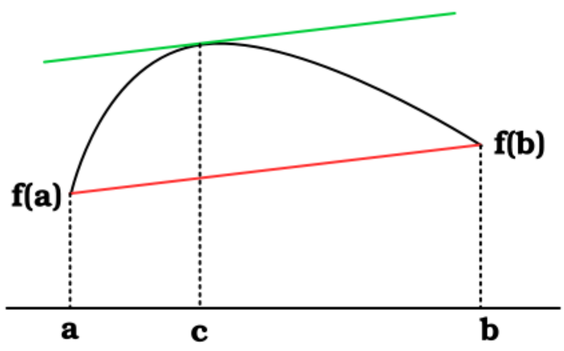
Esercizio 6. Perché non ho inserito nell'elenco il caso in cui f' abbia discontinuità essenziali? Aiutati a rispondere riguardando l'Esercizio 4. Poi, dimostra o confuta la veridicità della seguente affermazione: "tutti i punti e soli i punti in cui f è derivabile sono i punti in cui f' è continua o presenta discontinuità essenziali". Nel caso in cui l'affermazione sia falsa, correggila in modo da renderla vera.

Lo studio della funzione derivata prima: il segno e le radici di f'

Prima di avventurarci in quest'altra sezione, abbiamo bisogno di richiamare uno dei teoremi fondamentali del calcolo differenziale.

Teorema 3 (**di Lagrange**). *Sia f una funzione definita e continua in un intervallo chiuso $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Allora esiste almeno un punto $c \in [a, b]$ tale che*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

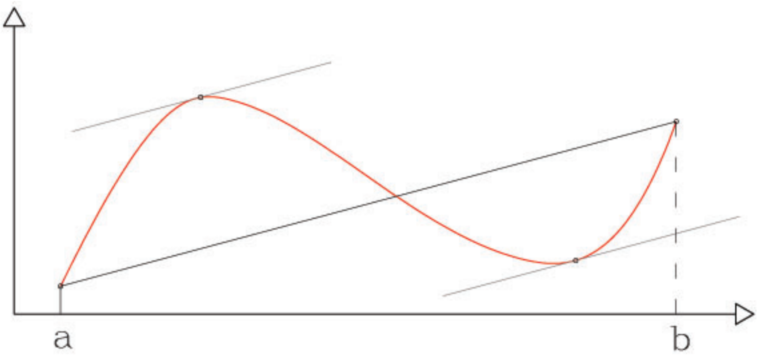


Osservazioni.

1. Il Teorema di Lagrange afferma l'esistenza di un punto c con questa proprietà, ma non ci dà alcuna informazione su come calcolarlo.

2. Inoltre, non è affatto detto che questo c sia l'unico a realizzare la proprietà. Guarda per esempio il grafico qui sotto.

ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com



Anziché fornirne una dimostrazione, per la quale ti invito nuovamente a riferirti al tuo libro di testo, vediamo cosa significa questo teorema. Prendiamo il caso in cui $a = x_0$ e $b = x_0 + h$ con $h > 0$ (per rimanere coerenti con la scrittura $[a, b]$): il membro destro dell'equazione diventa il rapporto incrementale di f in x_0, mentre il sinistro diventa la derivata di f in un suo punto compreso tra x_0 e $x_0 + h$. Dal punto di vista geometrico, stiamo affermando che, *se f è continua* in $[x_0, x_0 + h]$ (altrimenti, come sappiamo, non ha neanche senso parlare di derivabilità), il coefficiente angolare della secante al grafico di f nei punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ è uguale al coefficiente angolare della tangente al grafico nel punto $(c, f(c))$, ovvero le due rette sono parallele. In altre parole, esiste almeno un punto il cui tasso d'incremento istantaneo coincide con il tasso di incremento medio della funzione nell'intervallo. Se facciamo ora "collassare" b su a, ovvero se prendiamo $h \to 0$, vediamo che anche c, essendo f continua, deve necessariamente appiccicarsi ad a; la formula che salta fuori non è altro che quella ben nota della derivata di f in x_0.

Guardiamo un po' meglio l'equazione

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \;=\; h \cdot f'(c),$$

ottenuta dalla precedente moltiplicando a destra e sinistra per h, e supponiamo che la derivata prima sia positiva in ogni punto di $(x_0, x_0 + h)$. A destra compare un numero reale, il cui segno dipende solo da $f'(c)$, essendo h positiva. Ma avendo supposto che la derivata sia positiva in tutto l'intervallo aperto, si avrà che anche $f'(c) > 0$; quindi $h \cdot f'(c) > 0$, il che significa che $f(x_0 + h)$ è più grande di $f(x_0)$! In particolare, abbiamo così dimostrato che *nei punti in cui f' è positiva, f è monotona crescente in senso stretto*. Chiaramente vale l'analogo per f' negativa, e f sarà decrescente in senso stretto. Abbiamo dunque ottenuto un'informazione preziosissima: lo studio del segno di f' ci regala gli intervalli di monotonia di f!

E se la derivata prima si annulla in un punto x_0, cosa ne possiamo concludere? A priori, nulla: dipende dalla sua continuità in x_0 e dal suo segno negli intervalli precedente e successivo a tale radice. Analizziamo insieme cosa può accadere:

1. se f' *è continua* in x_0 e f' ha segno *discorde* prima e dopo x_0, avviene un "cambio di monotonia" nella f in x_0: siamo dunque di fronte a un *massimo* o a un *minimo* (il primo caso se $f' > 0$ prima di x_0 e $f' < 0$ dopo, il secondo caso viceversa). La tangente a f in $(x_0, f(x_0))$ sarà una retta orizzontale tutta sopra o tutta sotto al grafico di f in un intorno di x_0;

2. se f' *è continua* in x_0 e f' ha segno *concorde* prima e dopo x_0, la f mantiene la sua monotonia, ma presenta un punto che ha retta tangente parallela all'asse x e che sta da

una parte tutta sopra e dall'altra tutta sotto al grafico di f, indipendentemente da quanto vicino ci mettiamo a x_0. In questo caso si dice che x_0 è un *flesso a tangente orizzontale*;

3. se f' *non è continua* in x_0 dovremo calcolare $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$, indipendentemente dal fatto che x_0 sia una sua radice o meno; gli eventuali massimi, minimi o flessi saranno punti angolosi, cuspidi o altri punti di non derivabilità a seconda del valore delle derivate destra e sinistra, come abbiamo discusso nella sezione precedente.

Esercizio

Esercizio 7.

1. Dimostra che x_0 è l'unico minimo per $f(x) = (x - x_0)^n$, con $n \in \mathbb{N}$ *pari*, e che f non ha altri punti estremanti. Come puoi modificare semplicemente la funzione f per avere un massimo in x_0 anziché un minimo?

2. Dimostra che x_0 è l'unico flesso a tangente orizzontale per $f(x) = (x - x_0)^n$, con $n \in \mathbb{N}$ *dispari* maggiore o uguale a 3, e che f non ha altri punti estremanti.

Il significato geometrico della derivata seconda

Nella scorsa dispensa, avevamo visto che la retta tangente, quando esiste, rappresenta un'approssimazione lineare locale di una funzione; per arrivarci, avevamo utilizzato la derivata prima di una funzione. Ci potremmo giustamente chiedere se sia possibile migliorare questa approssimazione sfruttando le eventuali derivate successive di f, e la risposta a questa domanda è affermativa: in particolare, per analogia, possiamo ipotizzare che la derivata seconda - quando esiste - ci possa fornire una "approssimazione quadratica locale", ovvero un polinomio di secondo grado (una parabola) che si comporti in maniera simile alla retta tangente nel caso lineare.

Partiamo da un caso semplice, ovvero una qualunque funzione $f(x)$ derivabile in un certo punto x_0 e che presenti lì un minimo. Perché questa ipotetica parabola fornisca effettivamente una buona approssimazione della funzione, è innanzitutto indispensabile che abbia il proprio vertice nel punto in cui f ha il minimo e abbia concavità verso l'alto, ovvero che il coefficiente del termine in x^2 sia positivo.

Generalizzando questa intuizione, in maniera del tutto simile a come il segno della derivata prima fornisce gli intervalli di monotonia di f, possiamo concludere che il segno della derivata seconda fornisce gli intervalli di concavità di f. In altre parole, per stabilire se un punto in cui si annulla la derivata prima sia un massimo, un minimo o un flesso a tangente orizzontale di f, si potrebbe anche calcolare la derivata seconda in quel punto: se è positiva si tratta di un minimo perché la concavità è verso l'alto, se è negativa si tratta di un massimo perché la concavità è verso il basso. Tuttavia, nel caso fosse nulla sarebbe necessario procedere col calcolo della derivata terza, e così via. Nella pratica, perciò, è generalmente più comodo lo studio del segno di f', ma sempre meglio avere più metodi diversi, no?

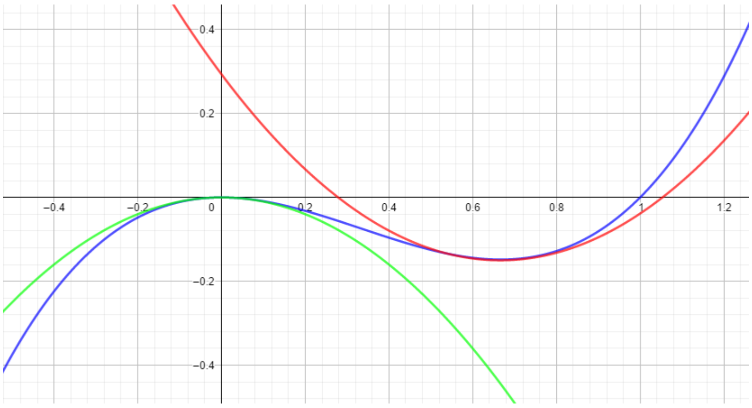


Figura 7: Grafico di una certa $f(x)$ (in blu), con le due parabole che mostrano come la derivata seconda ci parli sia della concavità sia dei massimi/minimi (verde/rossa) di una funzione.

Esercizi

Esercizio 8. Dimostra che la funzione $f(x) = a^x$, con $a \in \mathbb{R}$ maggiore di 1, non presenta né massimi, né minimi, né flessi.

Esercizio 9. Calcola il valore del numero di Nepero e con un errore di precisione inferiore a 0,001. Riesci a dedurne un'uguaglianza tra e e la somma di infiniti numeri?