ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

Le derivate nella fisica — una lezione con Andrea

In questo fascicolo ci occupiamo di chiarire le possibili applicazioni del concetto di derivata allo studio della fisica. L'analisi matematica, branca della matematica che avete incontrato per la prima volta tramite i concetti di limite, derivata e integrale, è stata fondamentale per la nascita della fisica moderna. Basti pensare che Isaac Newton è considerato il padre della fisica moderna[1] e, assieme a Gottfried Leibniz, uno dei fondatori del *calcolo infinitesimale*, da cui è fiorita la moderna analisi. Sarebbe perciò inutile tentare di redigere un elenco esaustivo delle applicazioni di un determinato strumento matematico allo studio della realtà. Ci limiteremo quindi ad analizzare alcuni casi di interesse in meccanica classica, sperando che possano dare un'intuizione riguardo all'"irragionevole efficacia della matematica nelle scienze naturali"[2] evitando di offuscare questo percorso concettuale con fenomeni fisici particolarmente complessi.
Per una trattazione delle derivate da un punto di vista più formale rimandiamo al fascicolo di Michele.

Variazione delle quantità fisiche

Posizione e velocità

Consideriamo ora il moto di una particella puntiforme nello spazio. Tale moto sarà descritto da una funzione che associa ad ogni istante di tempo la *posizione* del corpo nello spazio, ovvero per ogni tempo le sue coordinate $x(t), y(t)$ e $z(t)$. Poiché le coordinate sono numeri reali, così come il tempo, avremo quindi tre funzioni reali di variabile reale. Spesso queste funzioni vengono considerate tutte assieme come un'unica funzione $\vec{r}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.
Un'altra quantità a cui siamo interessati è la *velocità* del nostro punto materiale in ogni istante di tempo. Tale quantità è definita come il tasso di variazione della posizione nel tempo. Considerati due istanti di tempo t_1 e t_2 la *velocità media* durante l'intervallo di tempo $t_2 - t_1$ è definita come:

$$\vec{v}_{\text{media}} := \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

È importante notare che anche questa quantità è descritta da una funzione che associa ad ogni istante di tempo un vettore appartenente a $\mathbb{R}^3$.
Spesso questo dato non è sufficiente a descrivere dettagliatamente l'evoluzione del nostro sistema. Consideriamo ad esempio il moto di una pallina in caduta libera da uno scaffale della nostra libreria: se il tempo d'inizio della caduta è $t_0 = 0$ la legge oraria che ne governa il moto è

$$y(t) = y_0 - \frac{1}{2} g t^2,$$

dove y_0 è l'altezza dello scaffale mentre $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$ è l'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre. Proviamo a calcolare la velocità media della pallina durante l'intera caduta: il tempo di arrivo della pallina a terra risulta essere $t_1 = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$, da cui la velocità media del moto risulta essere

[1] Il suo scritto del 1685, "*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*", in cui applica gli strumenti dell'analisi allo studio della fisica, è considerato il primo vero trattato di meccanica classica ed è stato uno dei testi di riferimento per studenti e ricercatori per più di trecento anni.

[2] Questo è il titolo di un articolo, nonchè libro, scritto dal fisico Eugene Wigner nel 1960, in cui l'autore indaga questa inaspettata relazione fra una disciplina totalmente astratta, la matematica, e la sua capacità di descrivere accuratamente le leggi che governano la natura.

$$v_{\text{media}}(t_0,t_1) = \frac{0-y_0}{\sqrt{\frac{2y_0}{g}}-0} = -\sqrt{\frac{y_0 g}{2}}.$$

Calcoliamo ora la velocità media dopo metà di quest'intervallo di tempo: l'altezza raggiunta dalla pallina sarà

$$y\left(\frac{1}{2}t_1\right) = y\left(\sqrt{\frac{y_0}{2g}}\right) = y_0 - \frac{1}{2}g\left(\sqrt{\frac{y_0}{2g}}\right)^2 = y_0 - \frac{1}{4}y_0 = \frac{3}{4}y_0$$

da cui otteniamo una velocità media sull'intervallo di tempo $[t_0, \frac{1}{2}t_1]$

$$v_{\text{media}}(t_0, \frac{1}{2}t_1) = \frac{\frac{3}{4}y_0 - y_0}{\sqrt{\frac{y_0}{2g}}-0} = -\sqrt{\frac{y_0 g}{8}} = \frac{1}{2}v_{\text{media}}(t_0,t_1).$$

Abbiamo quindi che la velocità media del moto dipende dall'intervallo di tempo considerato, quindi non è costante nel tempo, un fenomeno presente in gran parte dei possibili moti fisici.
A questo punto è ragionevole chiedersi come la velocità di un generico moto $\vec{r}(t)$ dipende dal tempo. Tale dipendenza sarà descritta da una funzione reale di variabile reale $v(t)$. Per calcolarla ad un determinato tempo t_0 possiamo approssimarla con la velocità media su intervalli di tempo $[t_0, t_0+h]$ sempre più piccoli. Se il moto è abbastanza regolare ci aspettiamo che tale quantità tenda alla velocità in t_0 per l'ampiezza di questi intervalli, ovvero h, che tende a zero. Otteniamo così la *velocità istantanea*:

$$\vec{v}(t_0) := \lim_{h\to 0}\frac{\vec{r}(t_0+h)-\vec{r}(t_0)}{h} = \vec{r}'(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t).$$

Gli ultimi due termini dell'equazione sono solamente modi diversi di esprimere la stessa quantità, la *derivata di $\vec{r}$ rispetto a t*. Preferiamo usare la seconda notazione perché rende esplicita la quantità rispetto alla quale calcoliamo il tasso di variazione istantanea. Ogni derivata di una funzione vettoriale, ovvero $\vec{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, è intesa come il vettore delle derivate di ciascuna delle componenti. Per esempio la velocità di un moto nello spazio è definita come

$$\frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \left(\frac{d}{dt}x(t), \frac{d}{dt}y(t), \frac{d}{dt}z(t)\right)$$

tornando al nostro esempio della pallina in caduta libera possiamo quindi calcolare la velocità istantanea del moto

$$v(t) = \frac{d}{dt}y(t) = -gt.$$

avevamo dedotto precedentemente la velocità di caduta dipende dall'istante di tempo considerato.

Accelerazione e secondo principio della dinamica

Ora sappiamo che la velocità di un generico moto può dipendendere dal tempo. È quindi naturale studiare come questa velocità vari nel tempo. Come abbiamo fatto per la posizione possiamo chiederci quanto la velocità cambi in media durante un certo intervallo di tempo $[t_0, t_1]$. Tale rapporto fra la variazione di velocità e la lunghezza dell'intervallo di tempo considerato è detto *accelerazione media*

$$\vec{a}_{\text{media}} = \frac{\vec{v}(t_1)-\vec{v}(t_0)}{t_1-t_0}.$$

Di solito nemmeno questa quantità è costante nel tempo: definiamo quindi l'*accelerazione istantanea*

$$\vec{a}(t) := \vec{v}'(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \vec{r}''(t) = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(t).$$

Nell'esempio della pallina in caduta libera possiamo calcolare l'accelerazione istantanea derivando la velocità rispetto al tempo: otteniamo così $a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d}{dt}(-gt) = -g$, ovvero l'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre.
L'accelerazione di un moto è una quantità particolarmente importante in meccanica classica. Il secondo principio della dinamica prescrive come le forze che agiscono sul nostro sistema influiscono sulla traiettoria:

Secondo principio della dinamica. *L'accelerazione di un corpo è proporzionale alla risultante delle forze che agiscono su di esso. La costante di proporzionalità è detta massa inerziale.*

Denotando la risultante delle forze agenti su un corpo nella posizione r al tempo t con $\vec{F}(r,t)$ possiamo scrivere la seconda legge della dinamica nel seguente modo

$$\vec{F}(\vec{r}(t),t) = m\vec{a}(t)$$

Questa equazione ha una fondamentale utilità pratica: ricordando la definizione in termini di derivate dell'accelerazione e conoscendo la posizione $\vec{r}_0$ e la velocità $\vec{v}_0$ iniziali del nostro sistema possiamo impostare il seguente *problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \vec{F}(\vec{r}(t),t) = m\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(t) \\ \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 \\ \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0 \end{cases}$$

la cui soluzione sarà il moto fisico del sistema considerato. Rimandiamo una discussione approfondita dei problemi di Cauchy ad un altro fascicolo.

Leggi di conservazione

Nelle sezioni precedenti abbiamo visto come la derivata sia uno strumento utile per calcolare il tasso di variazione di una quantità. Un altro ambito di applicazione sono le *leggi di conservazione*: ovvero quantità che *non cambiano* durante l'evoluzione del sistema. Un esempio fondamentale è il *Principio di conservazione dell'energia meccanica.*

Forze conservative e potenziale

Una classe particolarmente interessante di forze sono le *forze conservative*:

Definizione (Forza conservativa)**.** *Una forza si dice conservativa se il lavoro compiuto da essa lungo un qualsiasi cammino chiuso è nullo.*

Le forze conservative risultano particolarmente importanti in quanto, grazie alle loro proprietà matematiche, abbiamo a disposizione strumenti aggiuntivi per studiare i sistemi sottoposti esclusivamente a forze di questo tipo, detti *sistemi conservativi.*

Teorema. *Se $\vec{F}(\vec{r})$ è conservativa allora ammette potenziale, ovvero una funzione $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che*

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r})$$

Il simbolo ∇ è l'operatore *gradiente*: in generale, per una funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita sullo spazio e a valori reali, il gradiente di f è definito come

$$\nabla f(\vec{r}) := \left(\frac{\partial}{\partial x} f(\vec{r}), \frac{\partial}{\partial y} f(\vec{r}), \frac{\partial}{\partial z} f(\vec{r}) \right)$$

dove, ad esempio, $\frac{\partial}{\partial x} f$ è la derivata parziale di f rispetto a x. La differenza fra derivate parziali e le usuali derivate $\frac{d}{dt} f$, dette *derivate totali*, è approfondita in appendice.
Questo teorema ci permette di enunciare un importantissimo risultato sui sistemi conservativi. Dato un sistema formato da n particelle con posizione $\vec{r}_i$, masse m_i e velocità $\vec{v}_i$, sottoposte ad una forza conservativa con potenziale $V(\vec{r})$, definiamo l'*energia cinetica* e l'*energia potenziale* della i-esima particella

$$K_i = \frac{1}{2} m_i \|\vec{v}_i\|^2$$
$$V_i = V(\vec{r}_i).$$

Teorema (di conservazione dell'energia meccanica)**.** *In un sistema conservativo l'energia meccanica totale*

$$E_m = K + V$$

dove $K = \sum_{i=1}^n K_i$ *e* $V = \sum_{i=1}^n V_i$ *si conserva, ovvero per ogni coppia di tempi* t_0 *e* t_1

$$E_m(t_0) = E_m(t_1)$$

La dimostrazione usuale, usando il teorema dell'energia cinetica, si riduce a constatare un'uguaglianza. Qui ve ne proponiamo una basata sull'applicazione delle derivate. Ci limitiamo al caso di sistemi di una particella in una dimensione spaziale mentre riportiamo la dimostrazione generale all'Appendice A.

Dimostrazione. Poiché trattiamo un sistema di una particella in una dimensione possiamo riscrivere l'energia meccanica come

$$E_m(t) = \frac{1}{2} m \left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 + V(x(t))$$

Assumiamo che questa sia una funzione derivabile del tempo. In tal caso il fatto che sia costante per ogni tempo equivale a

$$\frac{d}{dt} E_m(t) = 0$$

per ogni t. Calcoliamo quindi la derivata

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_m(t) &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 + V(x(t)) \right] \\ &= \frac{1}{2} m 2 \frac{d^2}{dt^2} x(t) \frac{d}{dt} x(t) + \frac{d}{dx} V(x(t)) \frac{d}{dt} x(t) \\ &= \left[m \frac{d^2}{dt^2} x(t) + \frac{d}{dx} V(x(t)) \right] \frac{d}{dt} x(t) \end{aligned}$$

Notiamo che, in una dimensione, il gradiente di $V(x)$ si riduce a $\frac{d}{dx} V(x(t))$. Sostituendo le definizioni enunciate precedentemente otteniamo

$$\frac{d}{dt} E_m(t) = [ma(t) - F(x(t))]\, v(t)$$

poichè $x(t)$ è la legge oraria della particella dovrà rispettare il secondo principio della dinamica, perciò il primo termine deve annullarsi. Quindi

$$\frac{d}{dt}E_m(t) = 0$$

□

Ulteriori applicazioni in dinamica e cinematica

La fisica non ha come unico scopo quello di indagare le leggi della natura: la sua applicazione pratica è alla base di ogni singolo sviluppo tecnologico di cui godiamo.
Come sappiamo dai fascicoli sulle derivate, esse risultano essere un utile strumento per lo studio delle proprietà delle funzioni sufficientemente regolari. In particolare ci permettono di trovare i punti di massimo e minimo. Un esempio di questa proprietà nelle applicazioni fisiche è la *balistica*, ovvero lo studio del moto degli oggetti sotto l'effetto della gravità terrestre, fondamentale, per l'esplorazione spaziale e per scopi meno nobili.

Esempio: Moto parabolico: altezza massima Consideriamo il moto di una particella puntiforme di massa m soggetta alla forza di gravità lanciata a tempo $t_0 = 0$ dalla posizione $\vec{r}_0 = (0, 0)$ con velocità di modulo v_0 e angolo rispetto all'orizzontale θ. Quale sarà la quota massima raggiunta?
Il vettore velocità iniziale risulta essere

$$\vec{v}_0 = (v_0 \cos(\theta), v_0 \sin(\theta))$$

mentre la forza a cui è sottoposto il corpo è

$$\vec{F} = (0, -mg).$$

Da ciò deduciamo che il moto del corpo sarà rappresentato dalla legge oraria

$$\vec{r}(t) = (v_0 \cos(\theta)t, v_0 \sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2)$$

Ora vogliamo scoprire qual e' la quota massima raggiunta dalla nostra particella, ovvero il massimo della componente y della legge oraria. Dall'analisi sappiamo che se per $t = \bar{t}$ la derivata prima della funzione è zero mentre la derivata seconda è negativa allora $\bar{t}$ è un punto di massimo. Questo è coerente con la nostra intuizione fisica: quando il corpo si troverà alla quota massima la sua velocità dovrà essere nulla, poiché appena prima il corpo starà salendo, quindi con velocità positiva, mentre subito dopo dovrà scendere e quindi avere velocità negativa. Calcoliamo la velocità istantanea del moto ottenendo così

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \left(\frac{d}{dt}[v_0 \cos(\theta)t], \frac{d}{dt}[v_0 \sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2]\right) = (v_0 \cos(\theta), v_0 \sin(\theta) - gt)$$

Risulta evidente che la componente y della velocità si annulla per $\bar{t} = \frac{v_0 \sin(\theta)}{g}$. Per l'accelerazione otteniamo

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = (0, -g)$$

come ci aspettavamo dal secondo principio della dinamica. Poiché l'accelerazione lungo y è costantemente negativa $\bar{t}$ è un punto di massimo. Sostituendo nella legge oraria otteniamo

$$\vec{r}(\bar{t}) = \left(\frac{v_0^2 \cos(\theta)\sin(\theta)}{g}, \frac{2gv_0^2 \sin^2(\theta) - gv_0^2 \sin^2(\theta)}{2g^2}\right)$$

ovvero un'altezza massima $y_M = \frac{v_0^2 \sin^2(\theta)}{g}$.

Moto parabolico: Gittata massima: Un'altra questione rilevante riguardo al moto parabolico è calcolare l'angolo ottimale per il lancio in modo da raggiungere la massima distanza orizzontale possibile. A tal fine dobbiamo prima calcolare la gittata. Per fare ciò calcoliamo il tempo di volo totale. L'atterraggio avverrà quando la particella raggiungerà quota $y = v_0 \sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$. Questa equazione polinomiale di secondo grado ammette due soluzioni: $t_0 = 0$ e $T = \frac{2v_0 \sin(\theta)}{g}$. La prima soluzione corrisponde alla posizione iniziale mentre la seconda è il tempo di volo totale. Sostituendo nella componente x della legge oraria otteniamo

$$x(T) = \frac{2v_0^2 \sin(\theta)\cos(\theta)}{g} = \frac{2v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$$

Possiamo interpretare questo risultato come un'equazione che descrive la dipendenza della gittata $x_T(\theta)$ dall'angolo θ. Possiamo quindi cercarne il massimo derivando rispetto all'angolo

$$\frac{d}{dt}x_T(\theta) = \frac{4v_0^2 \cos(2\theta)}{g}$$

che si annulla per $\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. L'angolo, per la natura fisica del problema, deve essere compreso fra 0 e π: otteniamo quindi $\overline{\theta} = \frac{\pi}{4}$. Assicuriamoci ora che sia un massimo: derivando ancora una volta rispetto a θ otteniamo

$$\frac{d^2}{dt^2}x_T(\theta) = -\frac{8v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$$

da cui $\frac{d^2}{dt^2}x_T(\overline{\theta}) = -\frac{8v_0^2}{g} < 0$, quindi l'angolo di lancio $\frac{\pi}{4}$ massimizza la gittata, con $x_M = \frac{2v_0^2}{g}$.

Esercizi

Esercizio 1. *Calcolare velocità, accelerazione, e posizione iniziale a tempo $t = 0$ dei seguenti moti:*

- $x(t) = e^{4t^2-3t+1}$
- $\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = \big(3\sin(t^2 - 2t), 3\cos(t^2 - 2t)\big)$
- $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = \big(3t + 1, 1 - 2t, -\frac{1}{2}t^2 + 3t\big)$

Esercizio 2. *Calcolare a quale forza $\vec{F}$ corrisponde a ciascuno dei seguenti potenziali:*

- $V(x) = -\frac{1}{(x-4)}$
- $V(x) = x^2 - \frac{1}{x}$
- $V(x, y) = 2(x^2 + y^2)$
- $V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Per gli ultimi due calcolare anche il modulo della forza.

Esercizio 3. *Una particella di massa m vincolata ad una retta ($x(t) \in \mathbb{R}$) è collegata a due molle, rispettivamente fissate nelle posizioni $x = 1$ e $x = -1$ e di costante elastica k e $2k$. Qual è la posizione x_m in cui l'energia potenziale del sistema è minima? Il punto dipende da k? Quanto vale $F(x_m)$?*

ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

Teorema della conservazione dell'energia meccanica, versione generale

Consideriamo ora un sistema formato da n particelle, ognuna delle quali si muove seguendo le leggi orarie $\vec{r}_i(t)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, sotto l'effetto di forze conservative. Notiamo innanzitutto che se $\vec{F}_j(\vec{r})$ sono le forze che agiscono sul sistema, ciascuna con potenziale $V_j(\vec{r})$, $j \in \{1, \ldots, k\}$, allora la singola particella avrà energia potenziale al tempo t pari a $V_i(t) = \sum_{j=1}^{k} V_j(\vec{r}_i(t))$. L'energia meccanica totale del sistema sarà

$$E_m(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left\| \frac{d}{dt} \vec{r}_i(t) \right\|^2 + \sum_{i=1}^{n} V_i(t) = \sum_{i=1}^{n} E_{m,i}$$

dove m_i e $E_{m,i}$ sono rispettivamente la massa e l'energia meccanica dell'i-esima particella. Occupiamoci ora della variazione nel tempo dell'energia del sistema studiando $\frac{d}{dt} E_m(t)$. Poichè la derivata è lineare[3] avremo

$$\frac{d}{dt} E_m(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt} E_{m,i}(t).$$

Concentriamoci quindi sulla derivata nel tempo dell'energia meccanica di ciascuna particella. L'energia cinetica, scritta in termini delle componenti del vettore velocità risulta essere

$$K_i = \frac{1}{2} m_i \left[\left(\frac{d}{dt} x_i(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} y_i(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} z_i(t) \right)^2 \right].$$

Derivando rispetto al tempo otteniamo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} K_i &= \frac{1}{2} m_1 \left[2 \frac{d^2}{dt^2} x_i(t) \frac{d}{dt} x_i(t) + \frac{d^2}{dt^2} y_i(t) \frac{d}{dt} y_i(t) + \frac{d^2}{dt^2} z_i(t) \frac{d}{dt} z_i(t) \right] \\
&= m_i \left(\frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_i(t) \right) \cdot \left(\frac{d}{dt} \vec{r}_i(t) \right) \\
&= m_i \vec{a}_i(t) \cdot \vec{v}_i(t).
\end{aligned}$$

Per l'energia potenziale la questione è leggermente più complessa: la funzione $V_i(\vec{r}_i(t))$ dipende dal tempo attraverso le tre componenti della posizione. Dovremo quindi usare la proprietà di derivazione delle funzioni composte su ciascun argomento di V_i:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} V_i(x_i(t), y_i(t), z_i(t)) &= \frac{\partial}{\partial x} V_i \frac{d}{dt} x(t) + \frac{\partial}{\partial y} V_i \frac{d}{dt} y(t) + \frac{\partial}{\partial z} V_i \frac{d}{dt} z(t) \\
&= \nabla V_i(\vec{r}_i(t)) \cdot \vec{v}_i(t)
\end{aligned}$$

Mettendo tutto assieme otteniamo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} E_{m,i}(t) &= \vec{a}_i(t) \cdot \vec{v}_i(t) + \nabla V_i(\vec{r}_i(t)) \cdot \vec{v}_i(t) \\
&= [\vec{a}_i(t) + \nabla V_i(\vec{r}_i(t))] \cdot \vec{v}_i(t) \\
&= [\vec{a}_i(t) - \vec{F}_i(\vec{r}_i(t))] \cdot \vec{v}_i(t)
\end{aligned}$$

[3] Ovvero se f e g sono due funzioni derivabili e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vale

$$\frac{d}{dt}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha \frac{d}{dt} f(t) + \beta \frac{d}{dt} g(t).$$

dove $\vec{F}_i$ è la risultante delle forze agenti sull'i-esima particella. Come nel caso più semplice questo prodotto, questa volta *scalare*, deve annullarsi. Perciò avremo

$$\frac{d}{dt}E_m = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}E_{m,i} = \sum_{i=1}^{n} 0 = 0,$$

perciò l'energia meccanica del sistema è costante nel tempo.