ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

Introduzione

Le derivate sono l'argomento attorno a cui ruota la branca dell'analisi infinitesimale che cade sotto il nome di *calcolo differenziale*. Le sue utilità sono molteplici: in questa breve dispensa, ci occuperemo in particolare di come utilizzarle per "raffinare" lo studio di funzioni di variabile reale, in modo da renderne più accurato il grafico.
Prima di cominciare, una nota: come avrai imparato in questi anni la matematica è quasi sempre progressiva, per cui, se pensi di avere qualche lacuna riguardo alle funzioni, ai limiti e alla continuità, corri a ripescare le lezioni di Luigi e Thomas che affrontano questi argomenti! Se invece sei pronto, cominciamo.

Il problema della tangente

Il primo problema che vogliamo affrontare è cercare di definire cosa sia la retta tangente a una curva in un dato punto. La risposta intuitiva che verrebbe da dare è "quella retta che tocca la curva solo in quel punto". Tuttavia, osservando le due Figure qui sotto vediamo che in realtà questo non solo non è vero, ma non è nemmeno detto che tale retta esista.

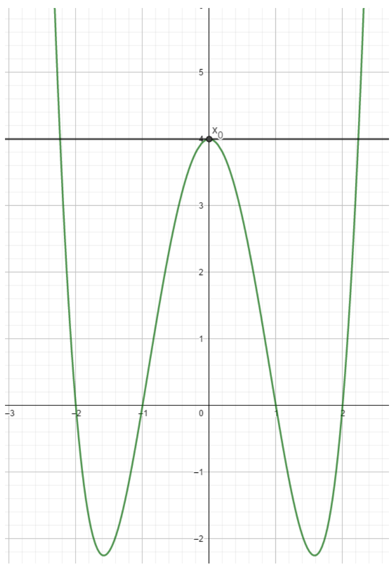

Figura 1: Grafico di $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$. La retta di equazione $y = 4$, che intuitivamente diremmo essere la tangente alla curva nel punto $x_0 = (0, 4)$ – e infatti lo è, interseca la curva in altri due punti.

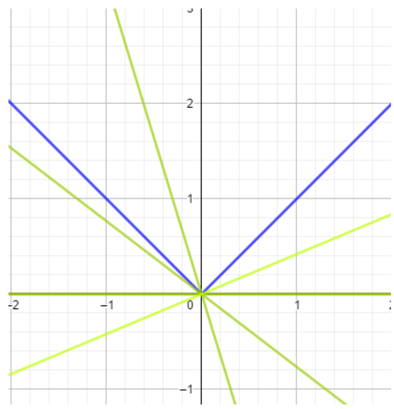

Figura 2: Grafico di $f(x) = |x|$. Nell'origine, esistono "infinite rette tangenti" alla curva.

ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

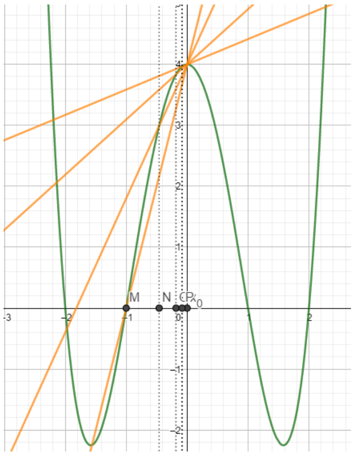

Figura 3: I punti M, N, O rappresentano $x_0 + h$ con $h \to 0$.

Prendiamo allora il problema un po' più alla larga, e consideriamo, anziché una retta tangente, una retta secante a una curva, cioè una retta che taglia la curva in due o più punti; per esempio, consideriamo la retta $y = 4x + 4$ nella Figura 3, che interseca la stessa curva della Figura 1 nei punti (0,4) e (-1,0). Se immaginiamo di tenere fissato il punto (0,4) e far ruotare la retta in senso orario, vedremo che il secondo punto di intersezione tenderà ad avvicinarsi sempre di più al primo. Quando i due punti coincideranno, ecco che la retta ottenuta sarà proprio la retta tangente che cercavamo.

Avendo usato la parola "tendere", potresti aver annusato odore di limite; e in effetti proprio di questo si tratta, come vedremo a breve. Prima di arrivarci, però, cerchiamo di formalizzare meglio quanto abbiamo appena detto. Rinfrescando un po' le formule sulle rette, ricordiamo che dati due punti distinti A e B qualunque nel piano, di coordinate (x_0, y_0) e (x_1, y_1), la formula del coefficiente angolare della (unica) retta passante per quei punti è data da

$$m_{0,1} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

In particolare, se consideriamo due punti appartenenti al grafico di una funzione $y = f(x)$, le cui coordinate sono $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$, la precedente formula si riscrive

$$m_{0,1} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

e rappresenta il coefficiente angolare della retta secante il grafico di $f(x)$ nei punti A, B. Ora, senza perdere di generalità, possiamo notare che per ogni x_0 esisterà sicuramente un certo $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che $x_1 = x_0 + h$ (perché abbiamo tolto 0?); con questa osservazione, possiamo nuovamente riscrivere la formula precedente come

$$m_h = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{\cancel{x_0} + h - \cancel{x_0}} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

L'ultimo termine dell'equazione si chiama *rapporto incrementale* della funzione $y = f(x)$ e rappresenta, come il nome suggerisce, il rapporto tra la differenza della variabile dipendente e di quella indipendente in due punti dati, che corrisponde al coefficiente angolare della retta secante il grafico in quei due punti.

Per come abbiamo riformulato il discorso, "far avvicinare i due punti" non significa altro che far rimpicciolire sempre di più h, ovvero prendere il limite per $h \to 0$. Possiamo dunque dare finalmente una definizione davvero formale di cosa sia una retta tangente.

Definizione 1. Si chiama *retta tangente* al grafico di una funzione $y = f(x)$ in un punto x_0 appartenente al dominio di f la retta passante per $(x_0, f(x_0))$ il cui coefficiente angolare è dato da

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

quando questo limite esiste ed è finito. Tale m si dice *derivata* di $f(x)$ nel punto x_0, si indica generalmente con $f'(x_0)$ o $Df(x_0)$ e rappresenta il limite del rapporto incrementale per $h \to 0$.

Osservazioni.

1. Una retta di equazione $y = mx + q$ è univocamente determinata dati un punto (x_0, y_0) appartenente ad essa e il suo coefficiente angolare m: per trovare la q basta semplicemente risolvere $q = y_0 - mx_0$, con x_0, y_0 e m noti. Dunque abbiamo effettivamente tutti gli ingredienti per calcolare l'equazione della tangente.

2. Se immaginiamo di trovarci "molto vicini" al punto di tangenza - dove al "molto vicini" si dovrà dare un senso matematico, come discusso nella lezione di Thomas - possiamo notare che la retta tangente e il grafico di f si comportano quasi allo stesso modo. La tangente quindi rappresenta una *approssimazione lineare locale* di f: ovvero, è una funzione polinomiale di primo grado che assume valori molto vicini a quelli di $f(x)$ per valori prossimi a x stesso. Ma questo significa che, se stiamo "quasi appiccicati" a x_0, possiamo "quasi sostituire" i valori prossimi a $f(x_0)$, che possono essere terribilmente brutti (o proprio impossibili) da calcolare, con quelli della tangente nel punto, estremamente più semplici da calcolare, con un errore "piuttosto piccolo"!

Di seguito, e anche più avanti, ti lascio un paio di eserciziettti semplici, volti a farti "masticare" il prima possibile quanto hai appena letto. Troverai la soluzione nel file allegato sotto a questo, ma ti consiglio di svolgerli subito e in autonomia; non si tratta di nulla di complicato. In fondo, invece, troverai degli esercizi più tosti, in cui dovrai dimostrare non solo di aver masticato, ma anche digerito quanto hai non più solo letto ma studiato; la soluzione di questi esercizi uscirà settimana prossima.

Esercizi elementari

Esercizio 1. Applicando la definizione di limite del rapporto incrementale, calcola la derivata di f nei punti x_0 assegnati *qualora sia possibile* (non sempre lo è!). Cerca inoltre di rispondere in maniera teorica alle domande presenti.

1. $f(x) = \sqrt{123456789}$ in $x_0 = \sqrt{987654321}$. Ho messo questi numeri orrendi perché sono una brutta persona, o sto solo cercando di spaventarti con una sciocchezza? Il risultato che ottieni è coerente con la maniera in cui abbiamo definito la derivata?

2. $f(x) = 11x - 1$ in $x_0 = -2$. Cosa cambia rispetto all'esercizio precedente (a parte i numeri più carini)?

3. $f(x) = x^2 + 1$ in $x_0 = 2$ e $x_0 = 5$. Noti qualche legame tra x_0, $f(x)$ e il risultato che ottieni?

4. $f(x) = x^3 - 3$ in $x_0 = -1$ e $x_0 = 4$. Confronta i risultati con quelli del terzo esercizio, in particolare osservando il grado dei polinomi considerati. Cosa ne puoi concludere?

5. $f(x) = x^2 + 1000000$ in $x_0 = 2$ e $x_0 = 5$. Confronta i risultati con quelli del terzo esercizio, in particolare osservando il termine noto del polinomio. Quel che accade è coerente col significato che abbiamo dato alla derivata in un punto?

6. $f(x) = \sqrt{x}$ in $x_0 = 1$ e $x_0 = 0$. Per il primo punto avrai bisogno di un limite notevole, quale? Quale problema riscontri nel calcolare il limite per il secondo punto?

7. $f(x) = |x - 1|$ in $x_0 = 0$ e $x_0 = 1$. Nel primo punto, è veramente necessario "sciogliere il valore assoluto" nei due casi? Quale problema riscontri nel calcolare il limite per il secondo punto?

La derivata come funzione

Abbiamo appena visto che la derivata di una funzione in un punto è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione in quel punto; in particolare, l'operazione di derivazione "prende" un numero reale, x_0, e ci "restituisce" un altro numero reale, m, che è univocamente determinato una volta fissati x_0 e $f(x)$. Ma questo, a ben pensarci, è esattamente quello che fa una funzione! E infatti abbiamo la seguente definizione.

Definizione 2. Si dice *derivata prima* di f, o più semplicemente *derivata* di f, la funzione reale di variabile reale che associa a ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$, ovvero $f'(x_0) \in \mathbb{R}$. Tale funzione si indica generalmente con $f'(x)$ o $Df(x)$.

Osservazione. Chiariamo subito la differenza tra le due definizioni che abbiamo dato:

1. la derivata di f *in un punto* è un *numero reale* che rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico in quel punto;

2. la derivata (prima) di f è una *funzione* che associa ad ogni punto la derivata di f in quel punto.

Si tratta di oggetti completamente diversi (un numero reale e una funzione), quindi occhio a non confonderli!

Proviamo a calcolare insieme quale sarà la funzione derivata prima di $f(x) = x^2$. Applichiamo la definizione:

$$
\begin{aligned}
f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}\,(2x+h)}{\cancel{h}} = 2x,
\end{aligned}
$$

valido $\forall x \in \mathbb{R}$ e coerente con i risultati ottenuti nell'Esercizio 1.3.

Altri esercizi elementari

Esercizio 2.

1. Applicando la definizione, dimostra che la derivata prima di $f(x) = x^3$ è $f'(x) = 3x^2$. Chiama ora $g(x) = f'(x)$. E' possibile calcolare la derivata prima di $g(x)$?

2. Ricordando la formula del binomio di Newton per lo sviluppo di $(a+b)^n$, con $n \in \mathbb{N}$, dimostra che la derivata prima di $f(x) = x^n$ è $f'(x) = nx^{n-1}$. Ti serve davvero tutto lo sviluppo del binomio di Newton, o ti basta molto meno? Cerca di rispondere alla domanda osservando le semplificazioni che hai fatto nell'esercizio precedente.

L'Esercizio 2.1 ci suggerisce che possiamo calcolare la derivata prima della derivata prima di una funzione. Ci potremmo chiedere dunque se sia possibile calcolare la derivata prima della derivata prima della derivata prima di una funzione, e così via all'infinito. In effetti, per alcune funzioni (non per tutte, ma ne parleremo in futuro) questo è vero. Noi ci occuperemo esclusivamente di derivate prime, il cui risvolto grafico già conosciamo, e derivate seconde, di cui scopriremo il significato geometrico nelle prossime lezioni. Possiamo in ogni caso fornirne una definizione generale.

Definizione 3. Si dice *derivata seconda* di $f(x)$ la funzione derivata prima della funzione derivata prima di una funzione, e si indica con $f''(x)\ \big(= (f'(x))'\big)$ o $D^2 f(x)\ (= D(Df(x))$. In generale, dato $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, si definisce ricorsivamente la *derivata n-esima* di $f(x)$ come la derivata prima della derivata $(n-1)$-esima di $f(x)$, e si indica con $f^{(n)}(x)$ o $D^n f(x)$.

Derivate delle funzioni fondamentali e regole di derivazione

Negli esercizietti che hai incontrato finora ti ho chiesto di calcolare derivate applicando la definizione principalmente con lo scopo di aiutarti ad assimilare quanto avevamo visto;

tuttavia, come puoi immaginare, quando la f diventa più complicata il limite del suo rapporto incrementale tende ad essere una schifezza da calcolare. Per fortuna, l'angelo custode della matematica ci viene in soccorso, fornendoci alcune formule e regole che ci salveranno dal passare il resto della nostra vita a calcolare limiti brutti. Ti rimando al tuo libro di testo (o a qualunque altro formulario scaricabile su Internet) per una lista completa delle derivate delle funzioni fondamentali. Sono da imparare praticamente tutte a memoria, ma come esercizio puoi provare a calcolarle da solo. Ricordiamo invece insieme le proprietà principali di cui gode la derivata, che ti saranno utilissime nello svolgimento degli esercizi.

Proprietà 1. La derivata è lineare, ovvero la derivata della somma è la somma delle derivate e la derivata di $kf(x)$ è $kf'(x)$ per ogni $k \in \mathbb{R}$. Vale perciò la seguente formula:

$$(af(x) + bg(x))' = af'(x) + bg'(x),$$

valido per ogni $a, b \in \mathbb{R}$.

Proprietà 2. La derivata del prodotto, invece, <u>*non*</u> è il prodotto delle derivate. Vale tuttavia la seguente formula:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Proprietà 3. Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, per la derivata prima della funzione composta $g(f(x))$ vale la cosiddetta *regola della catena* (o *chain rule*):

$$(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Osservazione. Riconoscere una funzione composta non è sempre facile. Sono da trattare come funzioni composte tutte quelle in cui compare una funzione come argomento: per esempio, il logaritmo di un seno, o un numero elevato ad un polinomio. Il trucco per riconoscerle agevolmente, è, come al solito, allenarsi a farne due milioni. Negli esercizi in fondo, che racchiudono quanto abbiamo visto finora, ne troverai un paio per cominciare, di difficoltà abbastanza buona.

Questo conclude la prima parte del nostro viaggio nel mondo delle derivate. Nella prossima puntata, approfondiremo alcune tematiche che abbiamo lasciato in sospeso: ad esempio, chi ci assicura che il limite del rapporto incrementale esista e sia finito? E che significato geometrico ha la derivata seconda? Alla prossima per scoprirlo insieme!

ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

Esercizi impegnativi

Esercizio 3. Utilizzando le formule precedenti, dimostra che, date due funzioni $f(x)$ e $g(x) \neq 0$, la derivata del loro rapporto è data dalla formula

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Usa poi questa formula per verificare che la derivata prima di $f(x) = \tan(x)$ è $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

Esercizio 4. Scrivi esplicitamente la formula della derivata seconda di una funzione $f(x)$ come limite del rapporto incrementale della derivata prima $f'(x)$. Nella formula così trovata, sostituisci a $f'(x)$ la sua definizione come limite del rapporto incrementale della $f(x)$ (dovrai quindi scrivere il limite di un limite - usa lettere diverse per l'incremento sulla variabile indipendente). Con la formula così ottenuta, verifica che la derivata seconda di $f(x) = x^3$ è $f''(x) = 6x$ (puoi risolvere quest'ultima parte senza alcun conto brutto se ti fai furbo!).

Esercizio 5. Approssima il valore delle funzioni f nei punti $x_1 = x_0 + \frac{1}{1000}$.

1. $f(x) = \tan\left(3^{2x^3-8x} - 1\right) + \ln\left(81^8\right)$ con $x_0 = 2$.
2. $f(x) = \log_a\left(\arcsin\left(\sqrt{3}x\right)\right)$ con $x_0 = \frac{1}{2}$, dove $a = e^{\frac{3\sqrt{3}}{\pi}}$.
3. $f(x) = \frac{\sqrt{e^{x^2-2x+1}+3}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)}$ con $x_0 = 1$.