ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

# Continuità – Una lezione con Thomas

Se consideriamo una funzione $f(x)$ sappiamo che per studiare come si comporta vicino ad un punto $x_0$ possiamo studiare il suo limite per $x$ che tende ad $x_0$, ovvero

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

tuttavia questo limite non sempre ci fornisce delle informazioni su come si comporti $f(x)$ nel punto $x_0$, nel caso in cui la funzione sia definita in quel punto.

Prendiamo per esempio la seguente funzione definita a tratti:

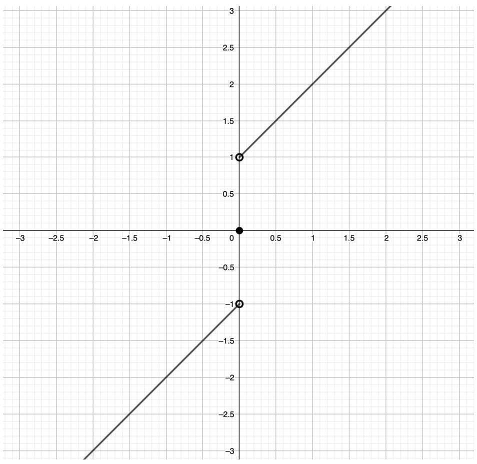

Figura 1: Grafico di $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x > 0 \\ x-1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

In questo caso, come abbiamo visto, dovremo calcolare limite destro e sinistro separatamente. Facendo i conti (fatelo per esercizio) si vede che

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

che sono entrambi diversi da

$$f(0) = 0.$$

Se invece consideriamo $f(x) = x^2 + 1$ ed $x_0 = 0$, si vede facilmente che

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} = f(0) = 1$$

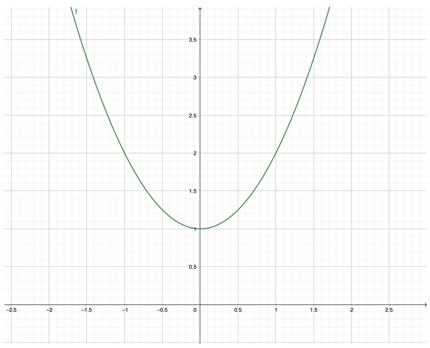

Figura 2: Grafico di $f(x) = x^2 + 1$

Quindi in questo caso il limite coincide con il valore della funzione nel punto $x_0$.

Quando questo accade, cioè quando la funzione ha limite $f(x_0)$ per $x$ che tende ad $x_0$ diciamo che la funzione è **continua nel punto** $x_0$. In generale otteniamo la seguente definizione:

**Definizione: funzione continua in un punto**

Consideriamo una funzione $f(x)$, sia $x_0$ un punto del suo dominio, diciamo che $f$ è **continua nel punto** $x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

che ricordiamo significa che $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in I_\delta(x_0), |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, ovvero $f(x)$ si trova vicino quanto vogliamo ad $f(x_0)$ se scegliamo $x$ abbastanza vicino ad $x_0$.

Nel caso in cui questo non dovesse accadere, come nel primo esempio che abbiamo visto, diremo che la funzione è **discontinua**, o meglio: **ha una discontinuità nel punto** $x_0$.

Abbiamo visto che il concetto di continuità è qualcosa definito per un singolo punto, ma cosa succede se $f$ è continua in tanti punti? Ad esempio, se chiamiamo $D$ il dominio di $f$, ovvero l'insieme dei valori su cui $f$ è definita, e prendiamo $A$ un sottoinsieme di $D$, allora abbiamo le seguenti definizioni:

**Definizione: funzione continua**

Se $f$ è continua in $x_0$, $\forall x_0 \in A$, allora diciamo che $f$ è **continua in** $A$.

Se $f$ è continua in tutto il suo dominio $D$, allora diremo semplicemente che $f$ è **continua**.

Per alcune funzioni invece può succedere che solo il limite destro (o sinistro) coincidano con $f(x_0)$. In tal caso diremo che la funzione è **continua da destra** (o **da sinistra**) in $x_0$.

Osserviamo allora che una funzione è continua in $x_0$ se e solo se è continua sia da destra che da sinistra nel caso $f$ sia definita in un intorno circolare del punto (cioè sia a destra che a sinistra di $x_0$). Se invece $x_0$ è un estremo del dominio di $f(x)$, allora diciamo che $f$ è continua in $x_0$ se è continua da sinistra o da destra, rispettivamente se $x_0$ è estremo destro (quindi $f$ è definita solo a sinistra del punto) o estremo sinistro (cioè $f$ è definita solo a destra di $x_0$).

**Proprietà della continuità**

Dalle proprietà dei limiti possiamo ricavarne alcune delle funzione continue, ad esempio sappiamo che se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni continue, allora avremo che anche $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $f(x)^{g(x)}$ e $f(g(x))$ lo sono. Se poi $g(x) \neq 0$ avremo anche che $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ è continua.

Ecco quindi che torna utile una lista di funzioni continue da cui partire, alcune di queste dimostreremo che lo sono negli esercizi, altre invece ci dovremo fidare in quanto la dimostrazione richiede più tempo di quanto sia conveniente dedicargli:

### Funzioni elementari continue:

Le seguenti funzioni elementari sono continue nel loro dominio:

- $f(x) = k$, con $k \in \mathbb{R}$;
- $f(x) = x^k$, $k \in \mathbb{Q}$, $k > 0$;
- $f(x) = a^x$, con $a > 0$;
- $f(x) = \log_a(x)$, con $a > 0$, $a \neq 1$;
- $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \cos x$.

ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

### Diversi tipi di discontinuità

Concentriamoci adesso sulle funzioni che non sono continue in un certo punto $x_0$ del loro dominio, cioè le funzioni $f$ per cui il limite per $x$ che tende ad $x_0$ non è $f(x_0)$. Chiamiamo i punti $x_0$ in cui questo avviene **punti di discontinuità** della funzione $f$ e per questi valori distinguiamo tre casi.

Il primo caso è quello in cui

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

esiste ed è finito, tuttavia $l \neq f(x_0)$. Se si verifica questa situazione diremo che $f$ ha una **discontinuità eliminabile** in $x_0$. Questo nome deriva dal fatto che la discontinuità può essere appunto "eliminata" semplicemente aggiustando la funzione $f$, cioè cambiando il valore che assume nel punto $x_0$ (se $x_0$ appartiene al dominio) oppure definendo $f(x_0) = l$.

## Esempio: discontinuità eliminabile

Consideriamo la funzione definita a tratti

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \neq 1 \\ 3 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Come si può vedere dal grafico, questa funzione è quasi uguale alla retta $y = x+1$ se non fosse che nel punto $x = 1$ abbiamo un buco nella retta e la funzione che assume il valore $f(1) = 3$.
In questo caso possiamo vedere che

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

quindi il limite esiste ed è finito, però non coincide con il valore assunto dalla funzione nel punto $x_0 = 1$.
Abbiamo quindi un esempio di discontinuità eliminabile. Come dicevamo questa discontinuità prende il nome dal fatto che possiamo "aggiustare" la funzione cambiando solo il valore nel punto $x_0$ per farla diventare continua, come se con una piccola pezza riempissimo il buco per rendere continua la funzione. Ad esempio in questo caso potremmo "aggiustare" la funzione ridefinendola come

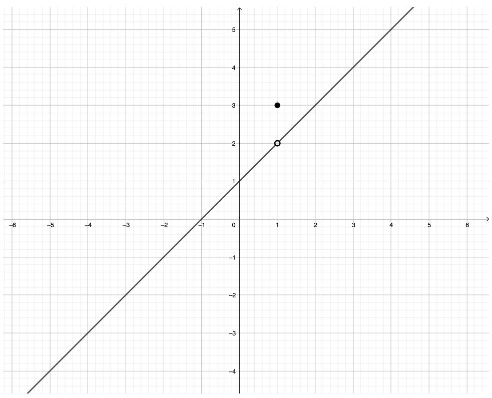

Figura 3: Grafico della funzione $f(x)$.

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases} = x+1$$

Ottenendo così la funzione che corrisponde alla retta $y = x+1$.

Il secondo caso invece si ha quando la funzione $f$ ammette limite destro e limite sinistro finiti, tuttavia i due limiti non coincidono, cioè:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_1$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_2$$

ma $l_1 \neq l_2$. In questo caso diciamo che la funzione $f$ ha una **discontinuità a salto** (o **di prima specie**) in $x_0$. Questa discontinuità viene chiamata in questo modo in quanto nel grafico della funzione si può notare un "salto" nel punto $x_0$ della funzione $f$, come si può vedere nel seguente esempio.

## Esempio: discontinuità a salto

Consideriamo la funzione definita a tratti

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{1}{1-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

In questo caso abbiamo l'esempio di discontinuità a salto, che prende il nome dalla situazione che possiamo osservare nel grafico per $x = 0$ dove la funzione fa "un salto". Infatti le calcoliamo

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left( \frac{1}{1-x} \right) = 1$$

e

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 = 0$$

ci accorgiamo che i due limiti esistono, sono finiti ma non coincidono. La distanza tra questi due valori cioè, se chiamiamo $l^-$ il limite da sinistra ed $l^+$ quello da destra, la quantità $|l^- - l^+|$ ci dice quanto sono distanti i due "pezzi" della funzione e quindi quanto è "grande" il salto.

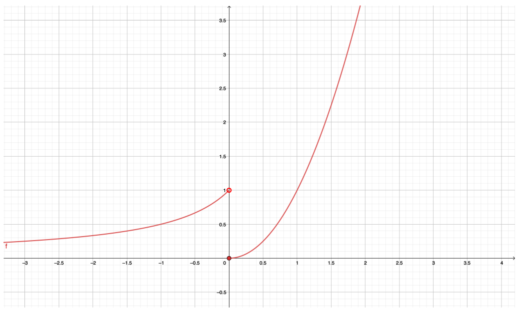

Figura 4: Grafico della funzione $f(x)$.

L'ultimo caso racchiude tutte le situazioni che non sono contenute negli altri due casi e si dice che $f$ ha una **discontinuità di seconda specie**. In questo caso troviamo sia le situazioni in cui il limite destro o sinistro della funzione $f$ sono infiniti, (e in questo caso alcuni libri parlano di **discontinuità asintotica**, ma è un nome usato raramente) oppure uno (o entrambi) il limiti non esistono (e in questo caso si può parlare di **discontinuità essenziale**) .

## Esempi: discontinuità di seconda specie

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{se } x \geq 0 \\ e^x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

In questo esempio vediamo che, se

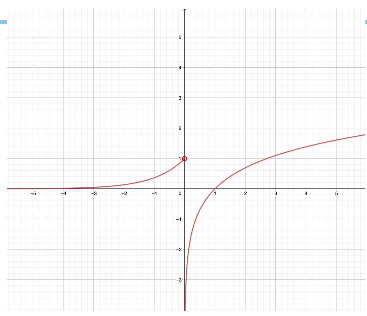

Figura 5: Grafico della funzione $f(x)$.

ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

calcoliamo

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^x = 1$$

quindi il limite sinistro esiste ed è finito, tuttavia

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

quindi il limite destro è infinito, quindi non siamo in presenta di nessuno dei due tipi di discontinuità di cui abbiamo parlato prima (eliminabile o a salto) e perciò possiamo dire di avere una discontinuità di seconda specie, in particolare siamo in presenza di una discontinuità asintotica.

Consideriamo come altro esempio la funzione

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

In questo caso se calcoliamo i limiti destro e sinistro per $x$ che tende a 0 possiamo vedere che non esistono, quindi avremo una discontinuità di seconda specie, in particolare detta *essenziale*.

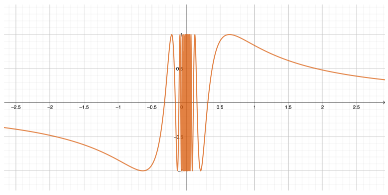

Figura 6: Grafico della funzione $f(x)$.

Una cosa che dobbiamo osservare sull'ultimo esempio proposto è che il punto $x_0 = 0$ non appartiene al dominio della funzione quindi, secondo la definizione che abbiamo dato di punto di discontinuità, $x_0$ non può essere definito tale. Tuttavia possiamo estendere questa definizione anche ai punti, come $x_0$ in questo esempio, che non appartengono al dominio di $f$ ma che tutta via sono dei punti di accumulazione, ovvero tali in ogni loro intorno, che ricordiamo è un qualsiasi insieme aperto contenente il punto considerato, possiamo trovare infiniti punti che appartengono al dominio della funzione. In parole semplici questo significa che è possibile parlare di limite della funzione per $x$ che tende ad $x_0$ anche se $x_0$ non è nel dominio, poiché "vicino" ad $x_0$ ci sono infiniti valori in cui è possibile calcolare $f(x)$ e quindi studiare il comportamento di $\lim_{x\to x_0} f(x)$ e determinare quale delle condizioni elencate prima per caratterizzare il tipo di discontinuità è verificata.

## Esercizi

1. Classificare la discontinuità del primo esempio presentato in questo fascicolo;
2. Dimostrare che la funzione
$$f(x) = \frac{2+x^2}{x-1}$$
è continua in $x = 0$ ma non in $x = 1$. Che tipo di discontinuità abbiamo in quel punto?

3. Determinare se la funzione $f(x) = x^2 + 3x - 2$ è continua in $x = 4$.

4. Studiare la continuità della funzione $e^{x-2}$ nel suo dominio.

5. Trovare e caratterizzare i punti di discontinuità delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \sin\left(\frac{x-2}{x^2-4}\right), \qquad g(x) = \ln\left(\frac{1}{x^2-6x+9}\right), \qquad h(x) = e^{g(x)}.$$

6. Determinare se le seguenti funzioni sono continue in $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \geq -1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se } x < -1 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} \ln\left(\dfrac{1}{x^2-2x+1}\right) & \text{se } x \geq 0 \\ 5 & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

7. Costruire una funzione $f(x)$ che soddisfi le seguenti condizioni:

   $f(x)$ ha una discontinuità eliminabile in $x_0 = 3$, una discontinuità a salto in $x_0 = -3$ e una discontinuità di seconda specie in $x_0 = 0$; $f(x)$ è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$ tranne, eventualmente, per i tre punti di cui sopra.