ASSOCIAZIONE CULTURALE MATEMUPPER
Sede Legale: Via venosa, 10 – 20137 Milano (MI)
Sede Operativa: Via Bergamo, 7 – 20135 Milano (MI)
Codice Fiscale: 97785560158
Tel: +39 375 531 6594
e-mail: matemupper@matemupper.com
Web: matemupper.com

Limiti notevoli

Ci sono alcune funzioni i cui limiti in determinati punti sono di pubblico dominio in quanto sono spesso usate ed è utile quindi ricordarsi. Eccone alcuni esempi:

- $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$
- $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$, con $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, dove $\ln x$ è il *logaritmo naturale* di x
- $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x} = k$, con $k \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$, con $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, dove $\ln x$ è il *logaritmo naturale* di x

Tramite questi limiti sarà possibile risolverne di più complicati come nel seguente esempio:
Esempio: Calcolare il seguente limite utilizzando dei limiti notevoli:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^x-1}{2\sin x}\right]$$

Soluzione: Guardando bene il limite che dobbiamo risolvere ci accorgiamo che a numeratore ci viene fornita "una parte" del secondo limite notevole che abbiamo elencato, mentre a denominatore c'è "una parte" del quarto. Il nostro obiettivo è aggiustare questa frazione in modo da far "comparire" tutti i pezzi dei limiti notevoli. Per farlo moltiplichiamo e dividiamo per x, così da ottenere

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}\right]$$

A questo punto riconosciamo l'espressione $\frac{e^x-1}{x}$ che, per x che tende a 0 ha limite $\ln e = 1$, mentre $\frac{x}{\sin x} = \frac{1}{\frac{\sin x}{x}}$ che ha limite $\frac{1}{1} = 1$ per x che tende a 0. Mettendo insieme queste informazioni otteniamo che

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}\right] = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Esercizi

Utilizzando i limiti notevoli calcolare l tale che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

per

- $x_0 = 0,\ f(x) = \dfrac{2^x - 1}{3x}$;
- $x_0 = 0,\ f(x) = \dfrac{(1+x)^2 - 1}{x}$;
- $x_0 = 0,\ f(x) = e^x - 1$;
- $x_0 = 0,\ f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$; (attenzione a questo esercizio!)

Forme di indeterminazione e ordini di infinito

Consideriamo due funzioni, $f(x)$ e $g(x)$. Se $\lim_{x\to x_0} f(x)$ e $\lim_{x\to x_0} g(x)$ esistono e sono finiti, allora vediamo che

- $\lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$;
- $\lim_{x\to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$
- $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$
- $\lim_{x\to x_0}(f(x)^{g(x)}) = \lim_{x\to x_0} f(x)^{\lim_{x\to x_0} g(x)}$

Ma cosa succede se invece i due limiti sono infiniti? In tal caso avremo delle forme di indeterminazione, cioè delle situazioni in cui non possiamo stabilire senza un ulteriore studio quale sia il loro valore.

Per capirlo dovremo confrontare le due funzioni.

Prendiamo ad esempio $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = x$ e cerchiamo di capire cosa succede quando x tende a $+\infty$ a $\frac{f(x)}{g(x)}$: se valesse la regola detta prima avremmo che

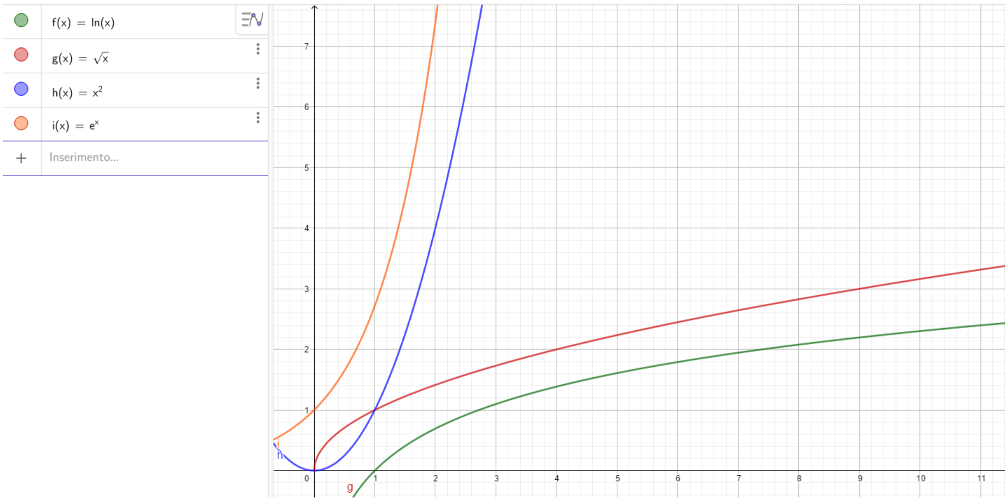
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

Otteniamo quella che viene chiamata, come già accennato, **forma di indeterminazione**, ovvero un'espressione che non è determinata, di cui non sappiamo bene quale sia il significato. Come dicevamo, per risolverla dovremo studiare meglio le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$. In particolare osserviamo che stiamo considerando il limite per x che tende a più infinito, ovvero stiamo studiando gli intorni sinistri di $+\infty$ e avremo a che fare con numeri sempre più grandi. In effetti osserviamo che se consideriamo $x = 100$, allora $f(100) = 100^2 - 1 = 9999$ mentre $g(100) = 100$, se prendiamo $x = 1000$ allora $g(1000) = 1000$, mentre $f(1000) = 999999$. Più andiamo avanti più è evidente che $f(x) > g(x)$ e in effetti si può dimostrare che $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ (fatelo per esercizio usando la definizione di limite). In questo caso diciamo che $f(x)$ è un **infinito di ordine superiore** rispetto a $g(x)$ oppure, viceversa, che $g(x)$ è un infinito di ordine **inferiore** rispetto ad $f(x)$, e scriviamo $g(x) << f(x)$.

Tramite il confronto di infiniti si possono risolvere alcune forme di indeterminazione, in particolare i principali confronti tra ordini di infinito sono i seguenti:

$$\log_a(x) << x^b << x^c << m^x << n^x << x^x$$

con $a, b, c, m, n \in \mathbb{R}$, $a > 0, a \neq 1$, $0 < b < c$ e $1 < m < n$.



Nel caso in cui invece

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{costante} \neq 0$$

diremo che le due funzioni hanno lo stesso ordine di infinito.

Un discorso analogo si può fare quando $f(x)$ e $g(x)$ tendono a zero, in tal caso parliamo però di **infinitesimi** e diciamo che una funzione $f(x)$ è un **infinitesimo di ordine superiore** rispetto a $g(x)$ se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Esercizi

Utilizzando il confronto tra infiniti ed infinitesimi calcolare l tale che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

per

- $x_0 = +\infty$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{3x}$;
- $x_0 = +\infty$, $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x^3}$;
- $x_0 = +\infty$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\log_3 x}$;
- $x_0 = 0$, $f(x) = \dfrac{(1+x)^2 - 1}{x}$; (attenzione: è lo stesso esercizio di poco fa, però dovreste provare a farlo con il confronto di infinitesimi)

Il teorema dei carabinieri

L'ultimo strumento che introduciamo e che può tornare utile per il calcolo dei limiti è il **teorema del confronto**, anche noto come **teorema dei carabinieri**.

Questo teorema ci permette di usare limiti di funzioni che conosciamo per studiarne altre, in particolare ci dice che se abbiamo tre funzioni $f(x), g(x)$ ed $h(x)$, definite in un intorno di un punto x_0 e tali che

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

per ogni x in un intorno di x_0, allora se

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l$$

si ha anche

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Esercizi finali

Risolvere i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to 2^+} \left(\frac{\sqrt{x-2}}{2x} \right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(e^{\frac{1}{x}} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{1}{1 - e^{3x}} \right)$$

$$\lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{1}{1 - e^{3x}} \right)$$

$$\lim_{x \to 0} \left((1 - \cos x)^2 \right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x \ln\left(\frac{1}{x}\right)}}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)} \right]$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{e^{\frac{1}{2x}}}{\sin x} \right)$$